Commande optimale des systèmes dynamiques hybrides

C.Iung P.Riedinger

La commande optimale

Pour définir un problème de commande optimale, nous devons avoir

- Un système dynamique i.e
  - Un espace de temps T
  - Un espace d'état X
  - Un espace de commandes U
  - Une fonction de transition d'état $\phi(t,t_0,x_{0,}u)$
  - Quelques axiomes de bon sens
- Un critère additif
  - $J(t_0,t_f,x_0,u)= J(t_0,t_i,x_0,u)+ J(t_i,t_f,x_i,u)$

Commande optimale

2 classes de méthodes :

- Méthodes variationelles

  la commande optimale û est caractérisée par le fait qu'une commande u=û+δu doit donner un critère supérieur $J=\hat{J}+\delta J$ en exprimant δJ en fonction de δu on peut espérer trouver des caractérisations de û

- Programmation dynamique

  l'application du théorème de Bellman

$$\hat{J}(t_0,t_f,x_0)=\min_{u_i}(J(t_0,t_i,x_0,u_i)+\hat{J}(t_i,t_f,x_i))$$

  peut donner une équation sur les critères dont la solution conduira au critère optimal

Méthodes variationnelles

- Elles s'appliquent lorsqu'il est possible d'évaluer la variation du critère en fonction de la variation de la commande.Ceci suppose des hypothèses de continuité voire de dérivabilité du critère optimal en fonction de u.
- Le théorème de référence est le théorème de Pontriaguine.

Théorème de Pontriaguine

- Soit
  - le système dynamique $\dot{x}=f(x,u),\ x\in X,\ u\in U$
    où f est continue sur $X\times\bar{U}$
  - Le critère $J=\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt+\varphi(x(t_f),t_f)$ ϕ est

Si $\hat{u}$ *et* $\hat{x}$ sont optimales alors il existe une fonction λ et une constante λ_0 <0, telles que

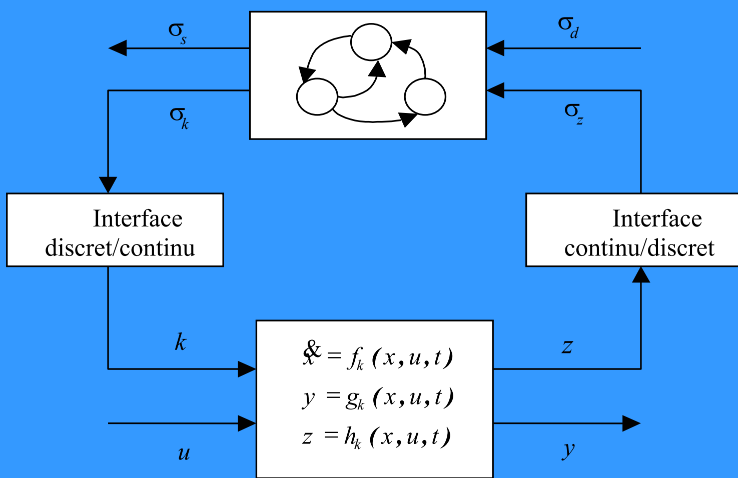
- x et λ vérifient les équations canoniques de Hamilton
  $$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$
- et û(t) maximise la fonction hamiltonienne sur $[t_0\ t_f]$
  $$H(\lambda_0,\lambda,\hat{x},u)=\lambda_0 L(\hat{x},u)+\lambda^T f(\hat{x},u)$$

Théorème de Pontriaguine, remarques

- Sous des conditions assez faibles, s'il existe des commandes satisfaisant aux conditions aux extémités, alors il existe une commande optimale.
- La recherche des trajectoires optimales et un problème de tir de dimension 2n. En effet s'ajoutent les conditions de tranversalité :

si $x(t_0)\in C_0\ \ x(t_f)\in C_f$ alors $\lambda(t_0)\in N_{C_0}x(t_0)\ \ \lambda(t_f)\in N_{C_f}x(t_f)$

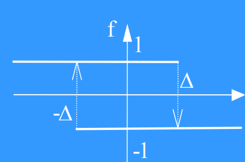
SYSTEME DYNAMIQUE HYBRIDE
=
SYSTEME FORME PAR LE COUPLAGE DE SYSTEMES DYNAMIQUES CONTINUS ET DISCRETS

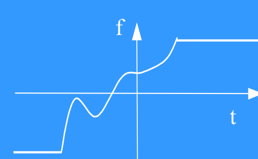


Quelques phénomènes hybrides

Le saut autonome

Exemples :
- **chocs,**
- **hystérésis,**
- **seuils,**
- **saturations, ...**

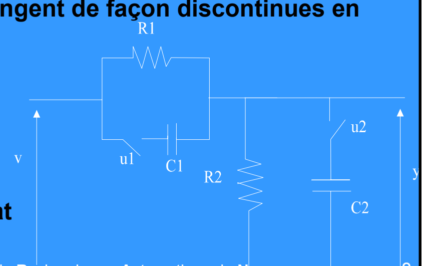




Le saut commandé

Le champ de vecteurs f et/ou l'état x(.) changent de façon discontinues en réponse à une commande de contrôle.

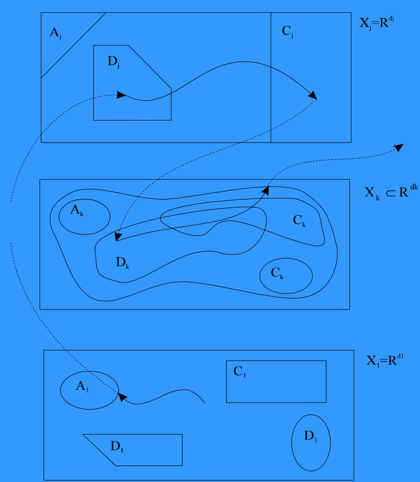
Exemple :
- **Circuit électrique avec interrupteurs**



Conséquence

➲ **Changement de dimension de l'état**

Sauts de l'état



Extension aux systèmes commutés 1

Hypothèse :

À tout instant on peut choisir le mode parmi tous les modes existants

$$\dot{x} = \sum_{k}^{N} d_k f_k(x,u,t) \qquad d(t) \in D = \left\{ d \in \{0,1\}^N : \sum_{k=1}^{N} d_k = 1 \right\}$$

$$J = \sum_{k \geq 0} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_{i_k}(x(t), u_{i_k}(t), t)\, dt$$

La commande d(t) a un nombre fini de valeurs

Extension aux systèmes commutés 2

- Le théorème de Pontriaguine s'applique

$$H_k(\lambda_0,\lambda,x,u_k,t)=\lambda^T f_k(x,u_k,t)-\lambda_0 L_k(x,u_k,t)=\begin{bmatrix}\lambda^T \\ -\lambda_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_k(x,u_k,t) \\ L_k(x,u_k,t)\end{bmatrix}$$

$$H_k(\lambda_0,\lambda,x,u,t)=\max_{i\in D}\left(\sup_{v\in U_m} H_m(\lambda_0,\lambda,x,v,t)\right)$$

$$where \quad m=\phi(x,k,i,t)$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H_k}{\partial \lambda} \qquad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H_k}{\partial x}$$

- Aux instants de commutation

$$H^+=H^- \qquad \lambda^+=\lambda^-$$

Extension aux systèmes commutés 3

- On convexifie le problème et on cherche les commandes bang-bang

$$\dot{x}=f(x,\alpha,u)=\sum_i \alpha_i(t) f_i(x,u)$$

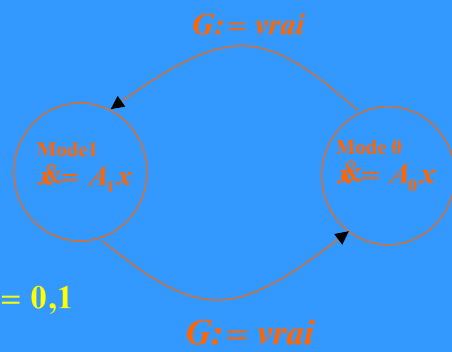
Avec $\sum_i \alpha_i(t)=1 \quad \alpha_i(t)\in[0,1]$

- Un problème : comme la commande est plus « pauvre » que dans le cas continu, il peut exister des commandes, mais pas de commande optimale.
- C'est le cas lorsque les fonctions hamiltoniennes sont égales pour une valeurs de la commande discrète convexifiée, sur un intervalle non nul.

Dynamique

$$\dot{x} = \alpha A_1 x + (1-\alpha) A_0 x$$

$$\alpha \in [0,1]$$



Critère

$$J = \int_{t_0}^{T} dt$$

Hamiltonien

$$H_k = \lambda^T A_k x, \quad k = 0,1$$

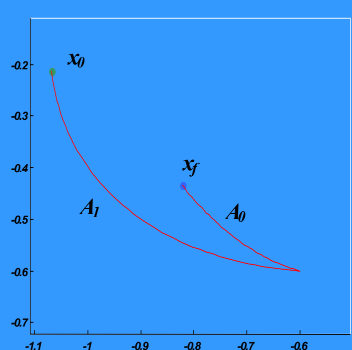
Loi de commande

$$\alpha(t) = 1 \quad si \quad H_1 > H_0$$

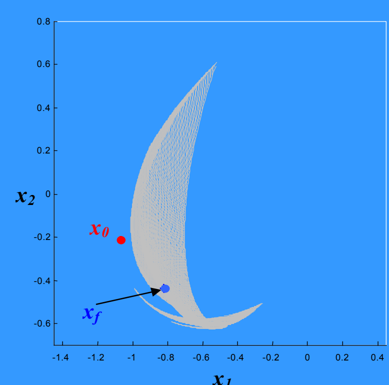
$$\alpha(t) = 0 \quad si \quad H_1 < H_0$$

Données :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & -1.4 \\ 0.8 & -0.7 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -1.3 & 1.1 \end{bmatrix}$$



Trajectoire quelconque obtenue pour un temps T1=1.4



Ensemble des trajectoires candidates à l 'optimalité joignant le point final en un temps T < T1

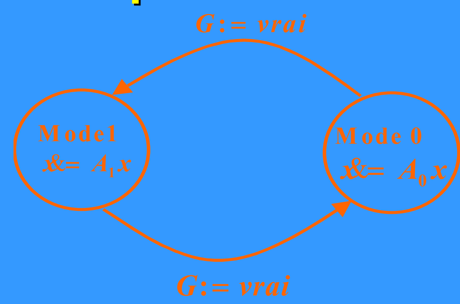
Conclusion : il n 'existe pas de chemin optimal

La solution sous optimale

- Le système étendu

$$\dot{x} = \alpha A_1 x + (1-\alpha) A_0 x$$

$$\alpha \in [0,1]$$



- Loi de commande

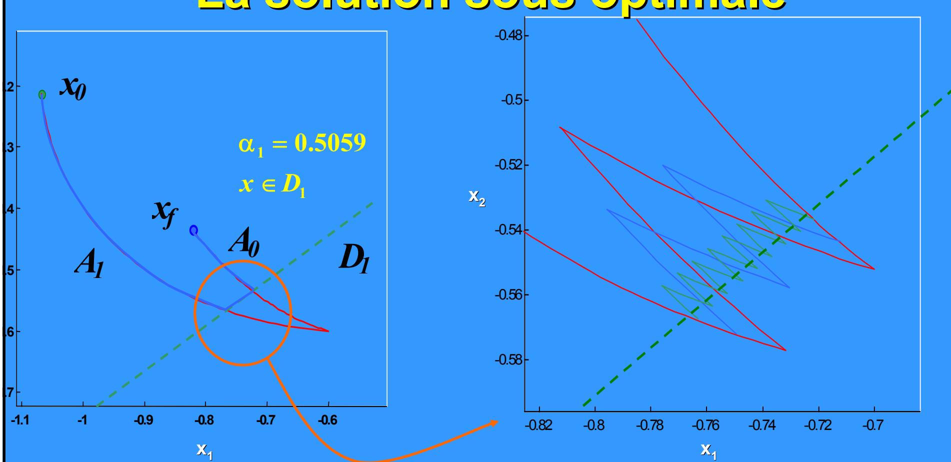
$$\alpha(t) = 1 \quad si \quad H_1 > H_0$$
$$\alpha(t) = 0 \quad si \quad H_1 < H_0$$
$$\alpha(t) = ? \quad si \quad H_1 = H_0$$

- Question : Existe-t-il un intervalle de temps non nul tel que $P(t) = H_1 - H_0 \equiv 0$

- Réponse : oui

$$\dim \Delta(x,\alpha) < n \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0.5059 \\ x \in D_1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \alpha_2 = 0.2963 \\ x \in D_2 \end{cases}$$

La solution sous optimale



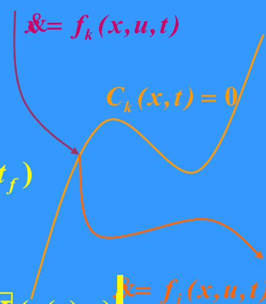
T1=1.4035 s T3=1.3489 s

T5=1.3446 s T17=1.3435 s

T_∞=1.3404 s

Systèmes avec sauts autonomes 1

Extension du théorème



➲ **Par intégration d 'un critère terminal au PM**

$$J = \min_u \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,s)ds + \psi(x(t_f),t_f)$$

➲ **par application du principe d'optimalité de Bellman**

$$\bar{J}_k(x(t_0),t_0) = \min_u \left\{ \int_{t_0}^{\tau} L_k(x,u,s)ds + \bar{J}_j(x(\tau),\tau) \right\}$$

sous la contrainte

$$C_k(x(\tau),\tau) = 0$$

Systèmes avec sauts autonomes 3

- Le recherche des solutions se complique car
  - On ne peut savoir à l'avance si une frontière sera franchie
  - Ni laquelle
  - Tous les cas doivent être envisagés

Système avec sauts autonomes 2

- Une extension est nécessaire :
  - f n'est plus continue en x (au passage des frontières)
  - λ ne peut donc plus être solution de

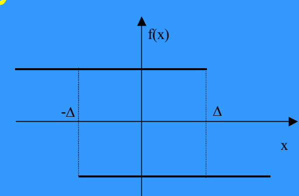
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

  - Cette condition est remplacée par la condition de transversalité sur la frontière, en tenant compte du critère terminal : il existe un vecteur π

$$H^+ = H^- + \frac{\partial C^T}{\partial t}\pi \qquad \lambda^+ = \lambda^- - \frac{\partial C^T}{\partial x}\pi$$

Un exemple hystérésis 1

$$\dot{x} = f(x) + u$$

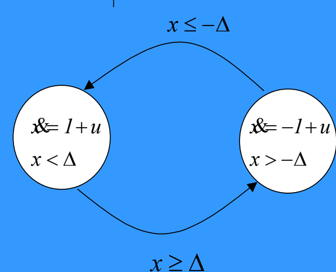


Critère

$$J = \int_0^\infty \left(x^2 + u^2\right) e^{-t}\, dt$$

On peut réécrire le système

$$\dot{x} = f_i(x,u) = i + u, \quad i = -1, 1$$



Automate associé

Un exemple hystérésis 2

$$H_i(\lambda,x,u,t)=\lambda^T f_i(x,u)-\tfrac{1}{2}(qx^2+u^2)e^{-t}$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H_i}{\partial \lambda}=f_i(x,u) \qquad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H_i}{\partial x}=qxe^{-t}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial u}\equiv 0 \iff u=\lambda e^{t}$$

Aux instants de commutation

$$C_i(x(t),t)\equiv x-i\Delta=0$$

$$u_i(\tau^-)=-u_{-i}(\tau^+)$$

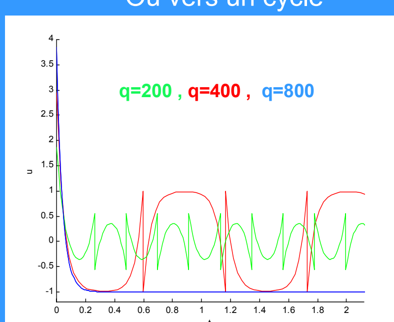
$$u_i(\tau^-)=u_{-i}(\tau^+)-2i$$

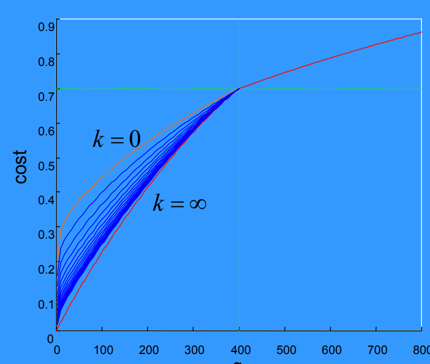
$$\lambda_i(\tau^-)=\lambda_{-i}(\tau^+)+\alpha_i\left.\frac{\partial C_i}{\partial x}\right|_{t=\tau}$$

$$H_i(\tau^-)=H_{-i}(\tau^+)-\alpha_i\left.\frac{\partial C_i}{\partial t}\right|_{t=\tau}$$

Un exemple hystérésis 3

- Il est impossible de savoir au départ quel est le nombre optimal de commutations;
- Seul le calcul du coût permet de conclure
  - Vers un point limite
  - Ou vers un cycle





La programmation dynamique et les équations HJB

- **Théorème 1:** Si une trajectoire admissible (⌧▭ ❑)(💻) déterminée par la donnée de la condition initiale (⌧ 0 ▭ ❑ 0)(💻) et de la commande (◆▭ ♎)(💻) , est optimale alors les conditions suivantes sont vérifiées :

  pour presque tout ♦ 2 [♋▭ ♌]
  - $$\frac{\partial V(x,q,t,b)}{\partial t} = -\inf_{u}\left\{ L_q(x,u,t) + \left[\frac{\partial V(x,q,t,b)}{\partial x}\right]^T f_q(x,u,t) \right\}$$
  - $$V(x(t),q(t),t,b) \leq V(x',q',t,b)$$

    $$q' = \varphi(x(t),q(t),d,t)$$

    $$x' = \phi(x,q,d,t)$$

En pratique 1

- Pour résoudre ces équations, il est obligatoire de discrétiser (cf Hedlung & Rantzer).
- Une approche intéressante consiste à discrétiser le problème dès le départ. Deux voies apparaissent intéressantes
  - Approche MLD (Bemporad, Morari)
  - Approche RPD (Lincoln and Rantzer CDC2002, ADSH2003)
- Des commandes sous optimales sont recherchées par encadrement
  - Systèmes affines par morceaux, partition de l'espace d'état

En pratique 2

- **Avec le PM :**
  - Problème aux frontières multiples (Conditions partagées aux instants initial et final et aux instants de commutations)
  - Bifurcation dans la trajectoire dès qu'une transition discrète est autorisée) Résolution par la programmation dynamique
  - Notons que le PM revient également à résoudre HJB mais dans des directions privilégiées correspondant aux trajectoires optimales et pour lesquelles la continuité de V est assurée
- **Conclusion :**
  - Des C.N. bien établies
  - Des efforts à mener pour parvenir à des algorithmes de résolution efficaces