

Amplificateurs audio fréquence

Classe A, AB et D

G. Couturier, département GEII, IUT Bordeaux1
gerard.couturier@u-bordeaux1.fr

Résumé : Compte tenu de la capacité limitée des piles et batteries, les systèmes audio portables (PC et téléphones portables, lecteurs MP3, jouets électroniques...) nécessitent des amplificateurs de puissance avec de forts rendements. Les amplificateurs classe D où les transistors fonctionnent en commutation offrent en pratique des rendements de l'ordre de 90%, bien supérieurs aux rendements des classiques classes A et AB et avec des taux de distorsion de l'ordre de 0,1 à 0,01%. Les amplificateurs classe D traditionnels utilisant un signal MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion, en anglais PWM pour Pulse Width Modulation) requièrent un filtre passe bas pour limiter le rayonnement. Pour remédier au fait que les inductances des filtres coûtent chers et sont encombrantes, on utilise de plus en plus les techniques d'étalement de spectre pour réduire le rayonnement. Ainsi sont apparus depuis quelques années déjà les amplificateurs classe D sans filtre (Filterless Class D Audio Power Amplifier).

Cet article est rédigé sous forme d'un exercice dirigé, avec une correction type. On se propose d'expliquer la classe D traditionnelle avec un signal de commande PWM, s'ensuit une discussion sur les techniques d'étalement de spectre visant à réduire le rayonnement et éliminer le filtre passe-bas. Dans une première partie on revisite les rendements des amplificateurs en classe A et AB en utilisant des caractéristiques très simplifiées des composants afin de dégager les ordres de grandeur. La deuxième partie est un préliminaire à l'amplificateur en classe D, on y construit un amplificateur à fort rendement mais avec un taux de distorsion non négligeable. La dernière partie est dédiée à l'étude d'un amplificateur classe D, on calcule dans un cas particulier le spectre approché d'un signal PWM et le taux de distorsion associé. L'article se termine par une discussion sur les amplificateurs en classe D sans filtre et une présentation des principales caractéristiques de quelques circuits intégrés disponibles sur le marché.

Mots clés : Classe A, AB et D, rendement, taux de distorsion, filtre, séries de Fourier, PWM, rayonnement, CEM (Compatibilité ElectroMagnétique), étalement de spectre

Niveau des étudiants : L'amplification classe A et AB (questions 1 à 9) est de niveau L1 en GEII-IUT. Les préliminaires de la classe D (questions 10 à 19) illustrent les cours sur les séries de Fourier (niveau L2). Hormis le calcul de la série de Fourier du signal PWM (questions 20-22) toutes les questions relatives à la classe D sont de niveau L2 en GEII-IUT.

I- Amplificateurs de puissance classe A et AB

L'amplification linéaire en classe A présente un très faible taux de distorsion, par contre, le rendement, rapport de la puissance utile dans la charge sur la puissance fournie par l'alimentation est faible. Dans le montage amplificateur classe A de la figure 1, le point de

fonctionnement statique du transistor T est : $(V_{CE} = \frac{V_{cc}}{2}, I_C = \frac{V_{cc}}{2R_C})$, R_C est la résistance

de charge, c'est dans cette résistance que doit être déposée la puissance. Pour dégager les paramètres pertinents, simplifions les caractéristiques $I_B = f(V_{BE})$, $I_C = f(I_B)$ et

$I_C = f(V_{CE})$ du transistor T en les linéarisant par morceaux comme le montre les courbes de la figure 2. La tension V_0 correspond au seuil de conduction de la diode Base–Emetteur.

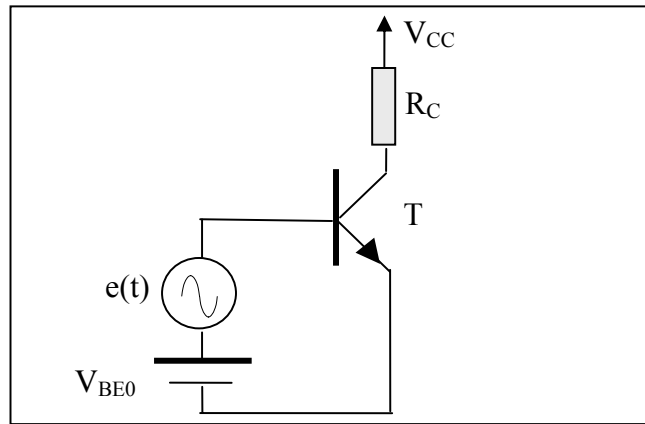


Figure 1 : Montage amplificateur classe A

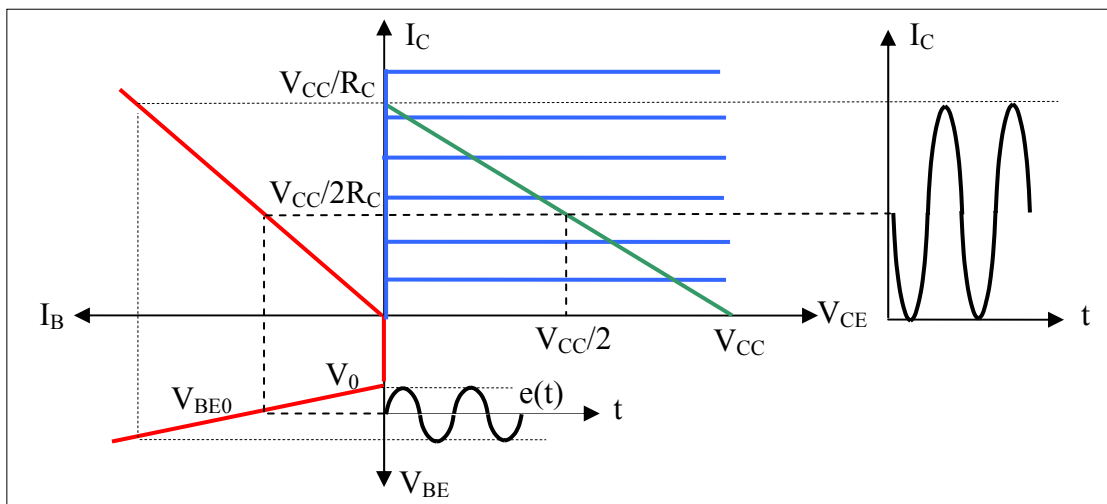


Figure 2 : Réseau de caractéristiques du transistor T et droite de charge

Question 1 : Calculer la puissance P_{S0} fournie par l'alimentation V_{CC} quand le signal $e(t) = 0$. Quelle est la puissance P_{C0} dissipée dans la charge R_C quand $e(t) = 0$?

Question 2 : Le signal $e(t)$ est de type sinusoïdal et de pulsation ω_0 , il est tel que le point de fonctionnement du transistor évolue sur la droite de charge entre les points $(V_{CC}, 0)$ et $(0, \frac{V_{CC}}{R_C})$. Exprimer le courant de collecteur $I_C(t)$ et calculer la puissance P_C dissipée dans

la charge R_C . Mettre P_C sous la forme $P_C = P_{C0} + P_{umax}$ où P_{umax} est la puissance utile, c'est-à-dire celle susceptible de fournir la puissance acoustique quand la charge est un haut parleur de résistance R_C .

Question 3 : Calculer la puissance P_S fournie par l'alimentation V_{CC} quand le signal $e(t)$ est présent, la comparer à P_{S0} .

Question 4 : Calculer le rendement $\eta_{\max} = \frac{P_{u\max}}{P_S}$. Quel est le taux de distorsion D du signal récupéré dans la charge ?

Question 5 : Le rendement η_{\max} calculé précédemment n'est obtenu que lorsque l'amplificateur délivre le maximum de puissance dans la charge R_C . Montrer que dans le cas général, c'est-à-dire pour une puissance P_u telle que $0 < P_u < P_{\max}$, le rendement η se met sous la forme :

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{P_u}{P_{\max}}$$

Pour augmenter le rendement, on utilise généralement un amplificateur fonctionnant en classe AB. Le schéma de principe est donné à la figure 3. La tension V_0 est égale au seuil de conduction de la diode Base-Emetteur. Le transistor T_1 entre en conduction quand $e(t) > 0$, le transistor T_2 entre en conduction quand $e(t) < 0$. Si les tensions continues V_0 sont retirées, T_1 ne conduit que si $e(t) > V_0$ et T_2 ne conduit que si $e(t) < -V_0$. Il existe dans ce cas un intervalle de temps où les courants I_{C1} et I_{C2} sont nuls, ce qui conduit à une distorsion non négligeable puisque le courant dans la charge R_C n'est plus sinusoïdal. Ce type d'amplificateur est de classe B.

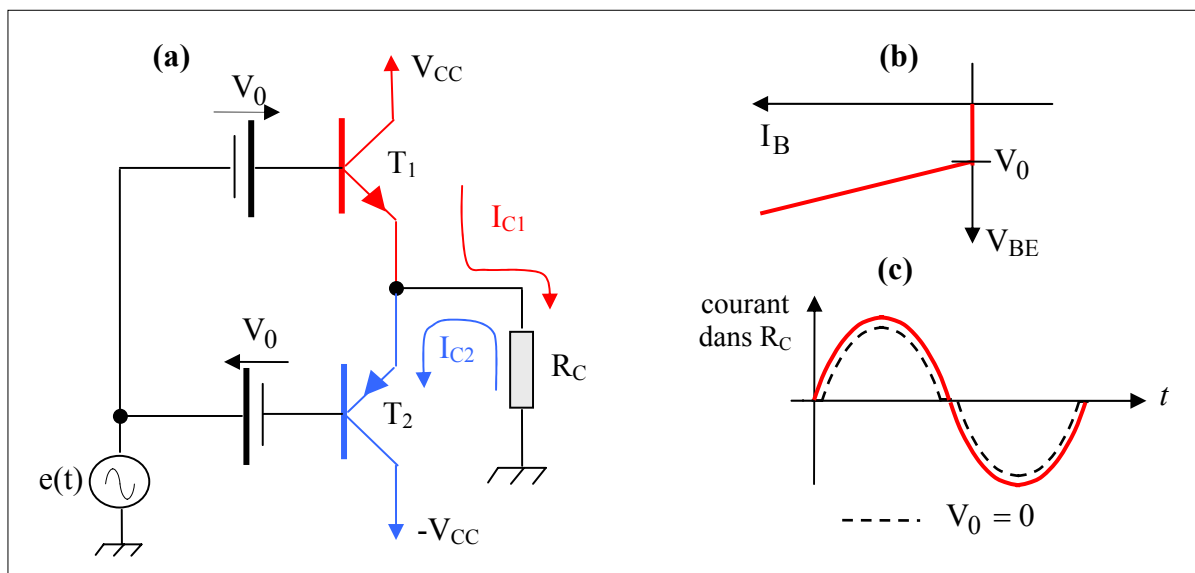


Figure 3 : (a) Amplificateur en classe AB, (b) caractéristique $I_B = f(V_{BE})$, (c) courant dans la charge R_C avec et sans les tensions V_0 .

Le réseau de caractéristiques du transistor T_1 et la droite de charge sont donnés à la figure 4. Quand $e(t) = 0$, le point de fonctionnement statique de T_1 est $(V_{CC}, 0)$.

Question 6 : Le signal $e(t)$ est de type sinusoïdal et de pulsation ω_0 , il est tel que le point de fonctionnement du transistor T_1 évolue sur la droite de charge entre les points $(V_{CC}, 0)$ et $(0, \frac{V_{CC}}{R_C})$. En déduire la puissance P_{S1} fournie par l'alimentation $+V_{CC}$. Quelle est la puissance totale P_S fournie par les alimentations $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$?

Question 7 : Calculer la puissance utile maximale $P_{u\max}$ dissipée dans la charge R_C .

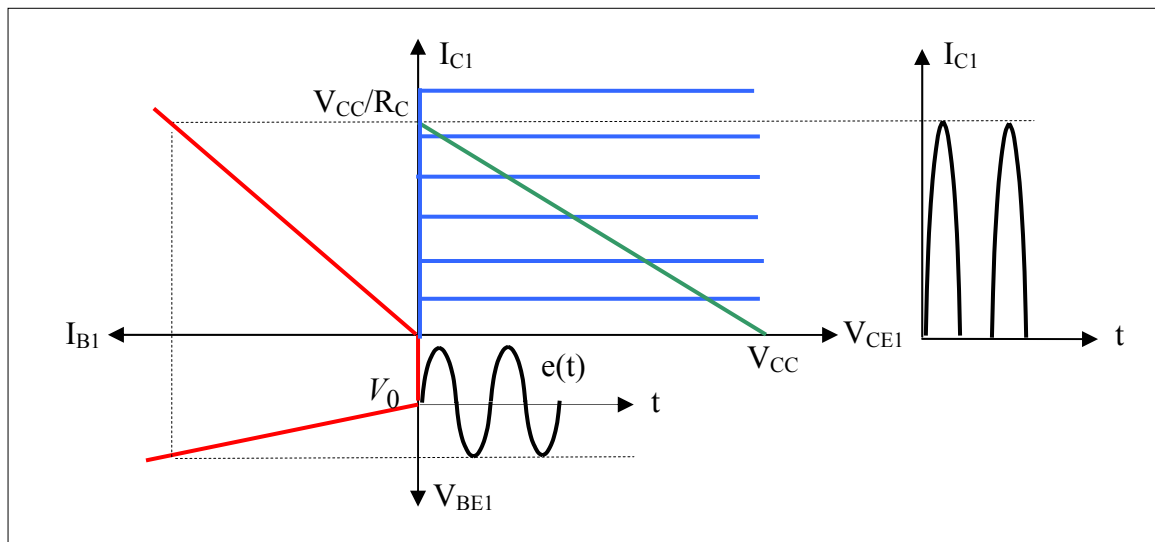


Figure 4 : Réseau de caractéristiques du transistor T_1 et droite de charge

Question 8 : Calculer le rendement maximum $\eta_{\max} = \frac{P_{u\max}}{P_S}$. Quel est le taux de distorsion D du signal récupéré dans la charge ?

Question 9 : Le rendement η_{\max} calculé précédemment n'est obtenu que lorsque l'amplificateur délivre le maximum de puissance dans la charge R_C . Montrer que dans le cas général, c'est-à-dire pour une puissance P_u telle que $0 < P_u < P_{\max}$, le rendement η se met sous la forme :

$$\eta = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{P_u}{P_{\max}}}$$

Tracer l'allure des rendements en classe A et AB en fonction du rapport P_u / P_{\max} .

II- Préliminaires à l'amplificateur classe D

En préliminaire à l'étude de l'amplificateur en classe D, on étudie le montage de base de la figure 5 où le transistor T_1 travaille en commutation, il est saturé ou bloqué. Le transistor T_1 est maintenant un MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor). En effet un amplificateur classe D requiert une fréquence de commutation au moins quatre à cinq fois plus grande que la bande passante audio fréquence (20 Hz – 20 kHz). L'utilisation de

transistors bipolaires à des fréquences de commutation d'une centaine de kHz conduit à des pertes excessives qui éliminent les avantages de la classe D.

Question 10 : Montrer par des considérations simples que la puissance dissipée dans un transistor bloqué ou saturé est nulle.

Le signal $e(t)$, de type sinusoïdal et de fréquence $f_0 = 1/T_0$, attaque un comparateur dont la sortie $b(t)$ attaque le MOSFET T_1 à canal P. Les niveaux de sortie du comparateur sont tels que, sur une période T_0 , le point de fonctionnement du transistor se trouve en A $(0, V_{DD}/R_C)$ pendant une demi-période $T_0/2$ et en B $(V_{DD}, 0)$ pendant l'autre demi-période.

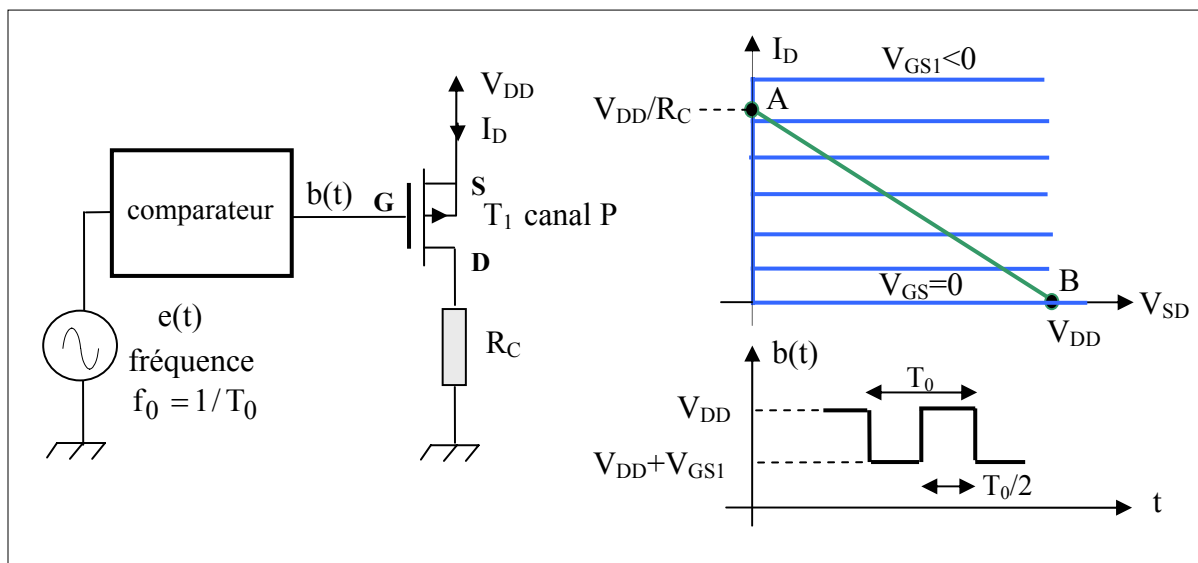


Figure 5 : Le transistor T_1 fonctionne en mode bloqué ou saturé

Question 11 : Représenter le graphe du courant $I_D(t)$ et calculer la puissance P_S fournie par l'alimentation V_{DD} .

Question 12: Le signal I_D est périodique, non sinusoïdal, il admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$I_D(t) = I_m + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t) \quad (1)$$

Calculer la valeur moyenne I_m et les coefficients I_n de la série de Fourier.

NB : l'écriture (1) est obtenue à condition de choisir une origine des temps telle que $I_D(t)$ soit une fonction paire.

Question 13 : Le but est, ne l'oublions pas, de réaliser une amplification de puissance du signal de fréquence f_0 . Or nous venons de créer certes un fondamental de fréquence f_0 mais aussi des harmoniques de fréquence $3f_0, 5f_0, \dots$ et une composante continue. En

conséquence le signal est fortement distordu et le rendement n'est pas très élevé. Calculer le rendement η défini par :

$$\eta = \frac{\text{Puissance du fondamental}}{\text{Puissance fournie par l'alimentation } V_{DD}}$$

Question 14 : Calculer le taux de distorsion D du signal récupéré dans la charge R_C .

On donne : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

Dans le montage de la figure 5, comme dans celui de la figure 1, la charge R_C est le siège d'un courant moyen non nul. Il y a donc une partie de la puissance dissipée par l'alimentation qui produit un effet joule non désirable et qui, par conséquent, ne produit pas de puissance acoustique. Il est possible d'éliminer ce courant moyen en utilisant un pont en H comme le montre le schéma de la figure 6. Pour les alternances positives du signal $e(t)$, les transistors, T_1 (canal P) et T_2 (canal N) sont saturés alors que les transistors T_3 et T_4 sont bloqués. Pour les alternances négatives de $e(t)$, T_3 et T_4 sont saturés et T_1 et T_2 sont bloqués.

Question 15: Représenter le graphe du courant $I_D(t)$ débité par l'alimentation V_{DD} et celui du courant $I_C(t)$ traversant la charge R_C .

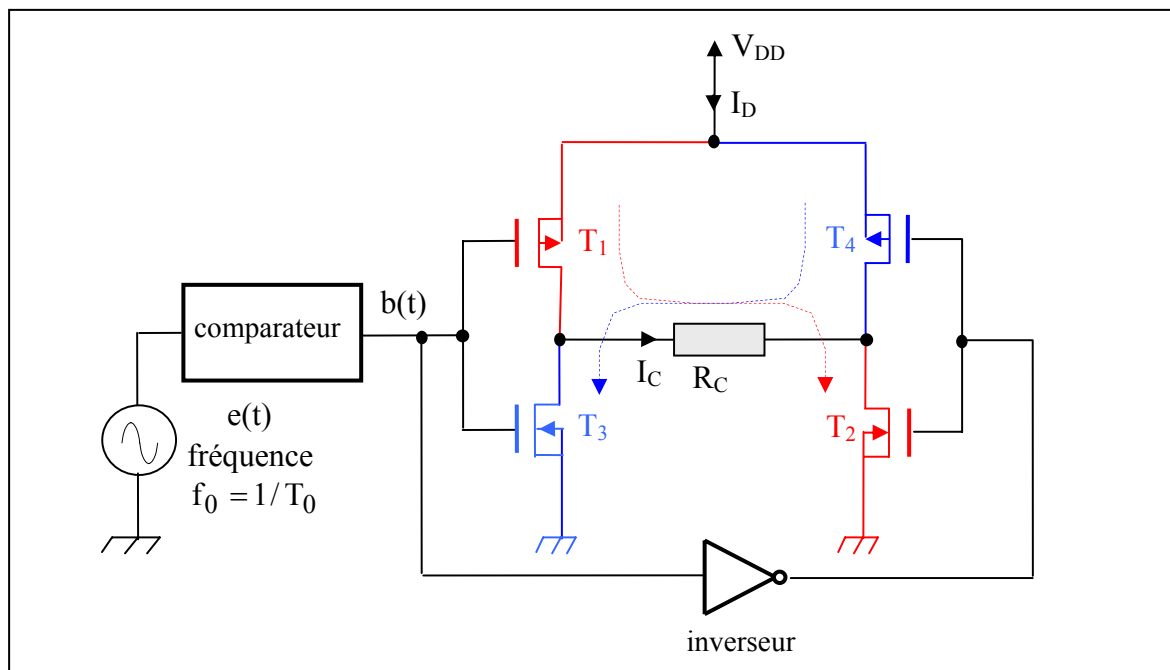


Figure 6 : Pont en H, quand les transistors T_1 et T_2 sont saturés, les transistors T_3 et T_4 sont bloqués et vice versa.

Question 16 : Calculer la puissance P_S fournie par l'alimentation V_{DD} .

Question 17 : Ecrire la série de Fourier du courant $I_C(t)$.

Question 18 : Calculer le nouveau rendement η :

$$\eta = \frac{\text{Puissance du fondamental}}{\text{Puissance fournie par l'alimentation } V_{DD}}$$

Question 19 : Calculer le taux de distorsion D du signal récupéré dans la charge R_C .

III- Amplificateur classe D

III-1- Amplificateur sans filtre

L'attaque du pont en H par le signal $b(t)$ symétrique conduit à un taux de distorsion élevé. Il faut donc trouver une solution pour atténuer très fortement les harmoniques ($n \geq 2$) du signal de fréquence f_0 . Les modulations classiques d'amplitude, de fréquence et de phase permettent de transposer une fréquence basse, appelée fréquence modulante, autour d'une fréquence beaucoup plus élevée, appelée fréquence porteuse. Ici c'est un peu différent car il ne faut pas tout transposer autour de la porteuse, il faut absolument garder le fondamental pour générer la puissance acoustique.

A cet effet on utilise généralement une technique de modulation connue sous le nom de MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion, en anglais PWM pour Pulse Width Modulation).

Le signal PWM $b(t)$, qui attaque le pont en H, est généré par comparaison d'un signal V_d en dents de scie d'amplitude A , de haute fréquence $f = 1/T$, avec le signal $e(t)$ comme le montre le synoptique de la figure 7.

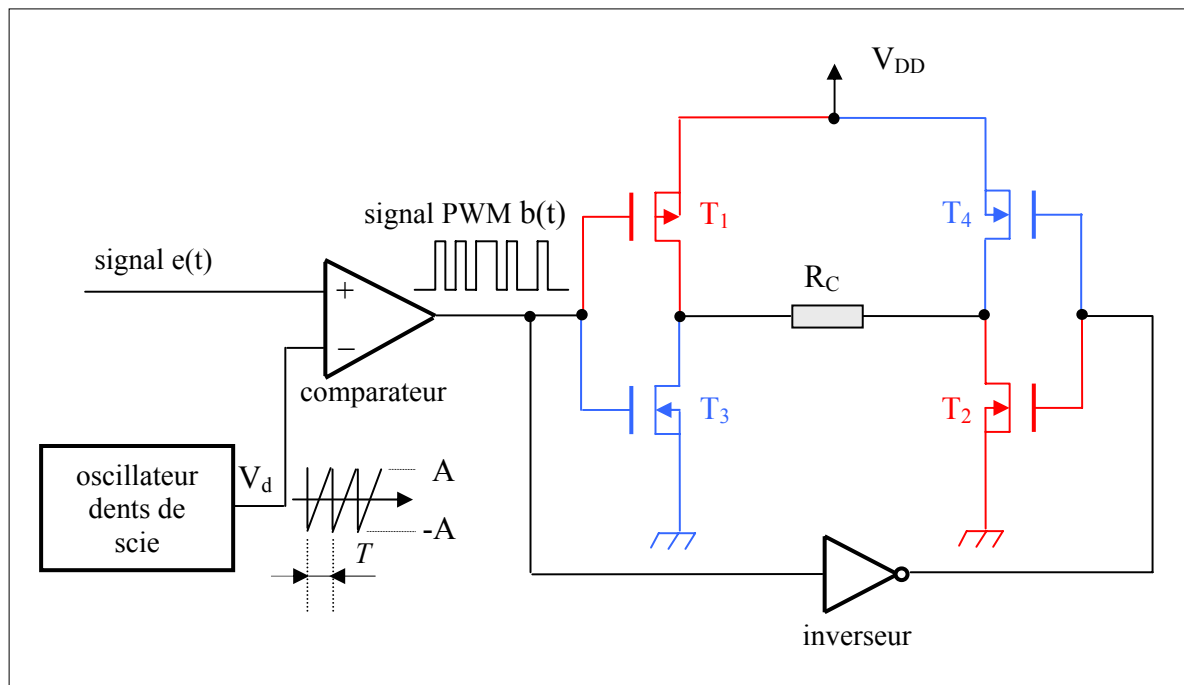


Figure 7 : Le modulateur PWM et le pont en H

Le signal $b(t)$ n'est plus symétrique, c'est une suite d'impulsions de largeur variable comme le montre le graphe (b) de la figure 8.

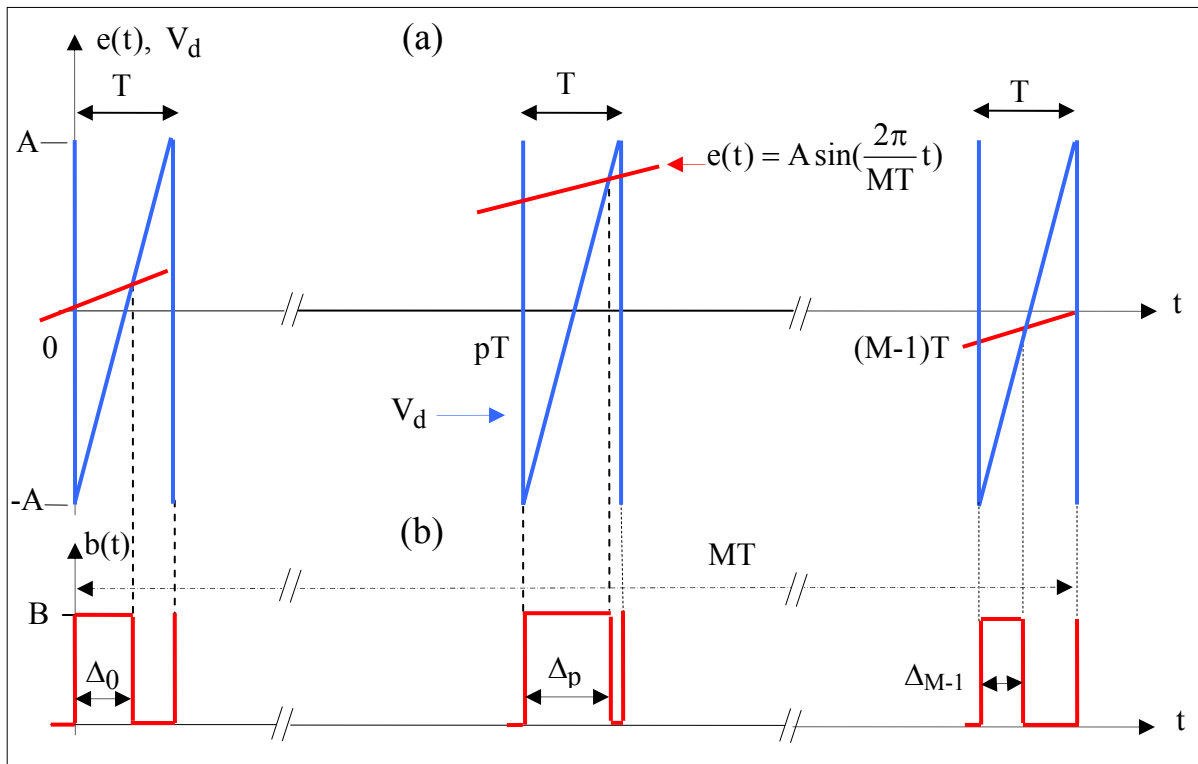


Figure 8 : (a) Signal d'entrée $e(t)$ et signal V_d en dents de scie, (b) signal PWM $b(t)$

Dans le cas général, le signal PWM $b(t)$ n'est pas périodique. Il n'est donc pas décomposable en série de Fourier, excepté dans le cas où la période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ de $e(t)$ est un multiple de la période T du signal V_d . On se propose de trouver, dans le cas particulier où $T_0 = MT$, avec M un entier, une décomposition en série de Fourier de $b(t)$.

Question 20 : Le signal PWM est constitué d'une suite d'impulsions d'amplitude B espacées de T . La durée de l'impulsion démarrant à l'instant pT , avec $0 \leq p \leq M-1$, est notée Δ_p . Dans le cas où l'amplitude crête du signal $e(t)$ est égale à A , l'amplitude des dents de scie, montrer que pour $p \gg 1$ on obtient :

$$\Delta_p \approx \frac{T}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi p}{M}\right) \right) \quad (2)$$

Question 21 : Le signal PWM $b(t)$ admet une décomposition en série de Fourier :

$$b(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t)) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (3)$$

Montrer, dans l'hypothèse où la durée de chaque pulse obéit à l'équation (2), que les coefficients a_n et b_n se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} a_n = \frac{B}{n\pi} \sum_{p=1}^{p=M} \left(-\cos\left(\frac{2\pi n}{M} \left(p-1 + \frac{\Delta_{p-1}}{T}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{M} (p-1)\right) \right) \\ b_n = \frac{B}{n\pi} \sum_{p=1}^{p=M} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{M} \left(p-1 + \frac{\Delta_{p-1}}{T}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{M} (p-1)\right) \right) \end{cases} \quad (4)$$

Montrer que la valeur moyenne b_0 est égale à $B/2$.

Question 22 : Ecrire un programme en langage Matlab (ou autre) pour obtenir les 500 premiers coefficients a_n et b_n puis les coefficients $s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Compte tenu de la périodicité du signal PWM $b(t)$, le spectre a des raies d'amplitude $s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ aux fréquences nf_0 . La figure 9 montre, dans le cas particulier où $f_0 = 2$ kHz et $f = 400$ kHz, les amplitudes s_n des 500 premiers harmoniques du signal PWM $b(t)$. Le spectre fait apparaître une raie importante à la fréquence $f_0 = 2$ kHz, le fondamental, et des raies autour des fréquences $f = 400$ kHz, $2f = 800$ kHz... , la figure 10 montre le détail des raies autour de $f = 400$ kHz.

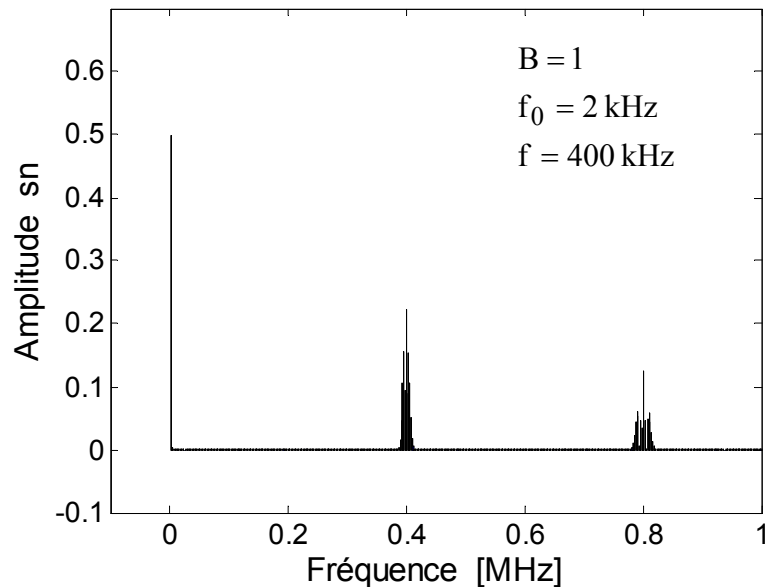


Figure 9 : Amplitudes des 500 premiers harmoniques du signal PWM $b(t)$.

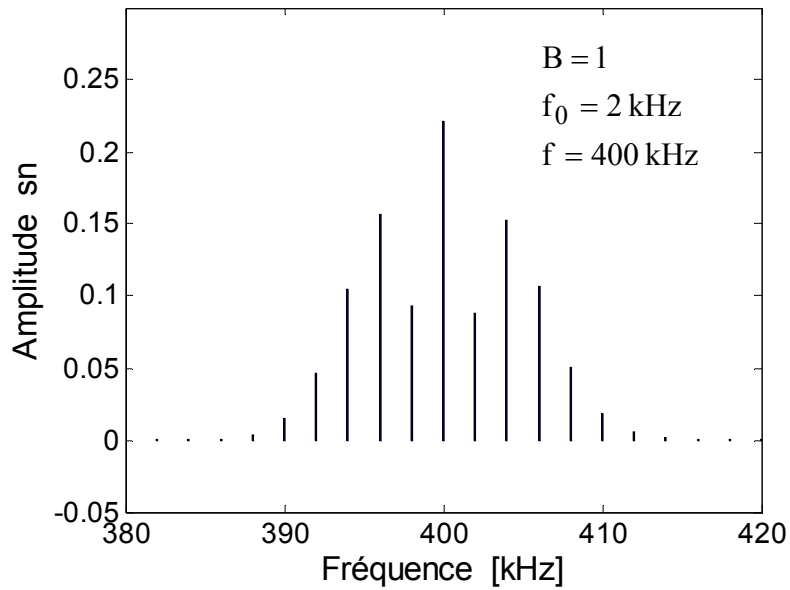


Figure 10 : Amplitudes des harmoniques du signal PWM $b(t)$ au voisinage de $f = 400$ kHz

La figure 11 montre le tracé de $\log_{10}(s_n)$ en fonction de la fréquence dans la bande audio fréquence (20Hz – 20kHz).

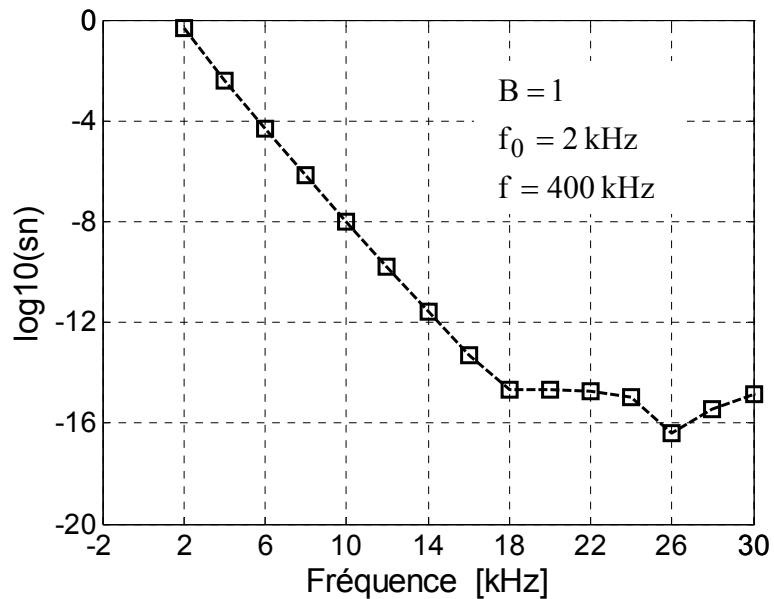


Figure 11 : Tracé de $\log_{10}(s_n)$ en fonction de la fréquence dans la bande audio fréquence

L'amplificateur de la figure 7 peut être modélisé par le schéma électrique de la figure 12 où les deux signaux S_1 et S_2 sont tels que $S_1 + S_2 = V_{DD}$.

La modulation PWM produit des impulsions de courtes durées, en conséquence le spectre contient comme nous l'avons vu des fréquences très élevées susceptibles de générer un rayonnement au delà des normes CEM (Compatibilité ElectroMagnétique). La figure 14 montre par exemple les amplitudes calculées, à partir des équations (4), du spectre PWM de $b(t)$ autour de la fréquence 100 MHz. Les normes CEM sont fixées par la FCC (Federal Communications Commission) aux USA et par la CENELEC (Comité Européen de Normalisation ELECTrotechnique) en Europe. Entre 30 MHz et 1 GHz, le champ électrique rayonné à une distance de 10 m doit grosso modo rester inférieur à $30 \text{ dB}\mu\text{V/m}$ ($\text{dB}\mu\text{V/m} = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{champ électrique en } \mu\text{V/m}}{1 \mu\text{V/m}} \right)$).

Avec une fréquence des dents de scie de quelques centaines de kHz, un CI (Circuit Intégré) classe D peut aussi fortement perturber par exemple la bande de fréquence AM (Amplitude Modulation) en ondes longues (150 kHz – 280 kHz).

Quels sont les sous ensembles susceptibles de rayonner ? Principalement les câbles entre le CI et le haut parleur. Quel est l'ordre de grandeur du champ rayonné par un fil isolé parcouru par un courant I ? Si la longueur ℓ du fil est inférieure à la longueur d'onde λ , cas d'un dipôle rayonnant, le champ électrique rayonné, en champ lointain, à une distance r du fil est égal à $\frac{Z_0 \ell I}{2\lambda r}$ avec $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f}$ et $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$, l'impédance du vide [1]. On rappelle que champ lointain signifie $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$.

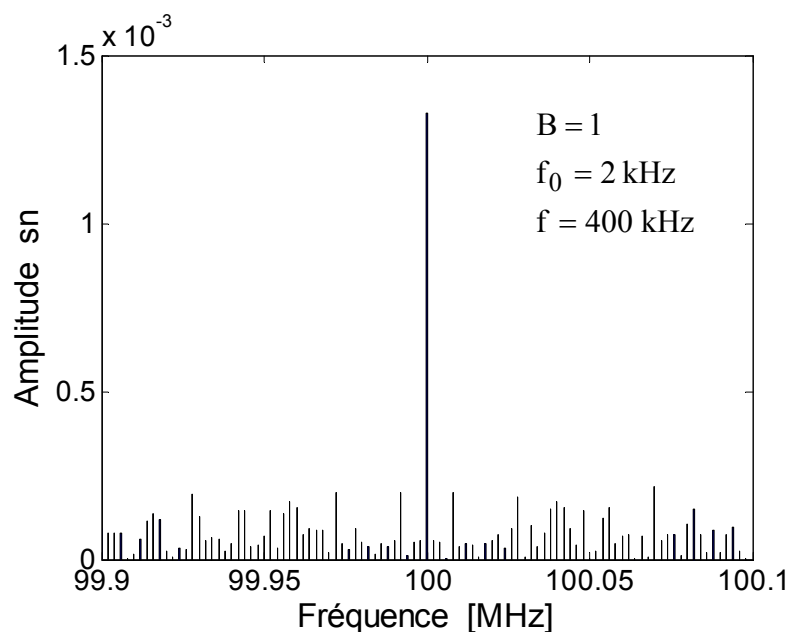


Figure 14 : Amplitudes des harmoniques du signal PWM $b(t)$ autour de 100 MHz

Question 25 : Déterminer l'amplitude s_n de la raie à 100 MHz sur la figure 14. Calculer le champ électrique ξ rayonné à 10 m, en V/m et en $\text{dB}\mu\text{V/m}$, à la fréquence de 100 MHz par un des fils, supposé isolé, de longueur 50 cm reliant l'amplificateur à une résistance

$R_C = 8\Omega$, la tension d'alimentation V_{DD} étant égale à 10 V, ordre de grandeur pour un amplificateur de 10 W. Conclure.

III-2- Amplificateur avec filtre

Pour limiter le rayonnement et donc satisfaire les normes CEM, on utilise un filtre L-C comme le montre la figure 15. Nous verrons par la suite, que dans le cas des amplificateurs classe D de faible puissance, il est possible de se passer de ce filtre en utilisant une technique d'étalement de spectre.

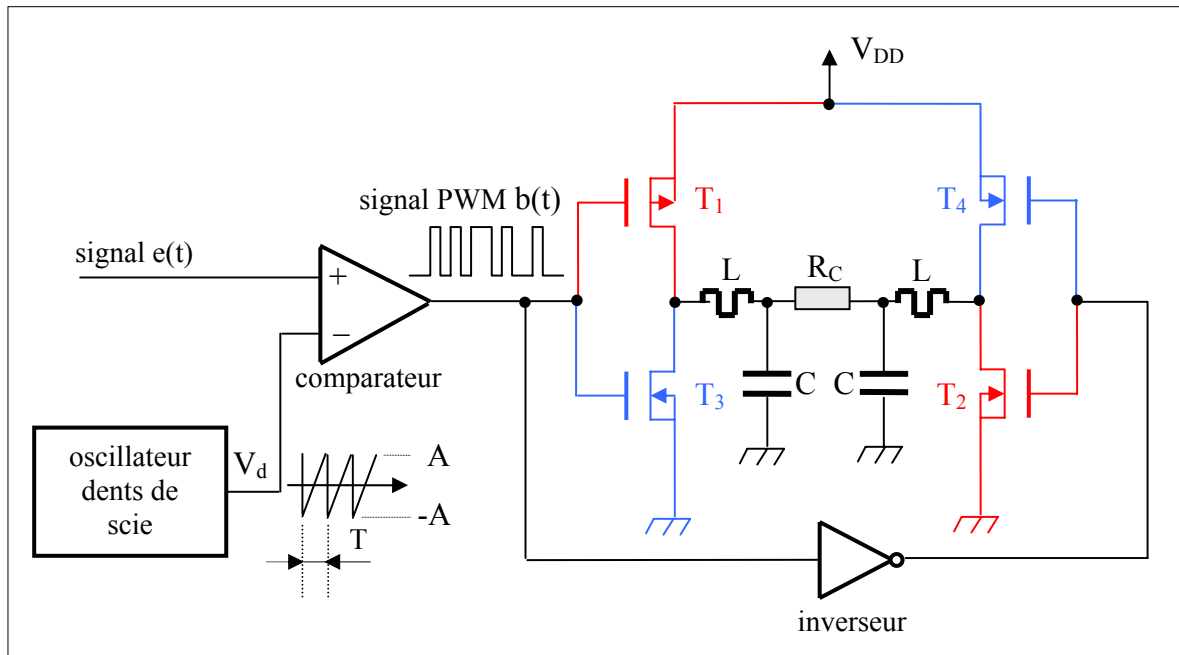


Figure 15 : Amplificateur classe D avec filtre limitant le rayonnement

L'amplificateur de la figure 15 peut être modélisé par le schéma électrique de la figure 16 où les deux signaux S_1 et S_2 vérifient comme précédemment la relation $S_1 + S_2 = V_{DD}$.

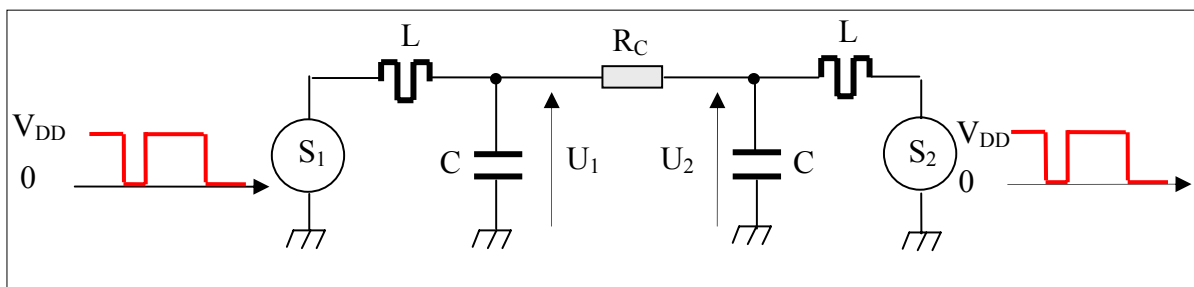


Figure 16 : Modélisation de l'amplificateur de la figure 15

Pour une des fréquences nf_0 ($n = 1, 2, 3 \dots$) de S_1 et S_2 le schéma électrique de la figure 16 se ramène à celui de la figure 17 dans lequel les deux sources de tension sont en opposition de phase et ont chacune une amplitude égale à E_n .

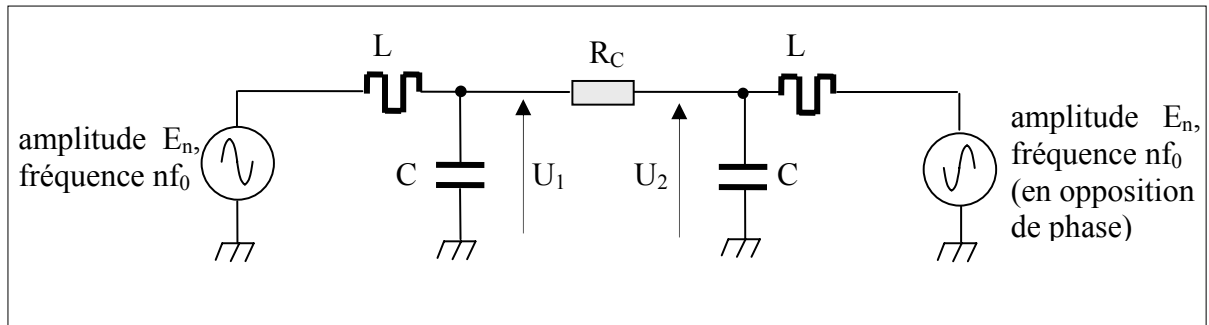


Figure 17 : Schéma de la figure 16 pour la fréquence $n\omega_0$, les deux sources sont en opposition de phase

Le schéma électrique de la figure 17 peut être transformé pour obtenir celui de la figure 18 où il est plus facile de calculer la tension aux bornes de la charge R_C .

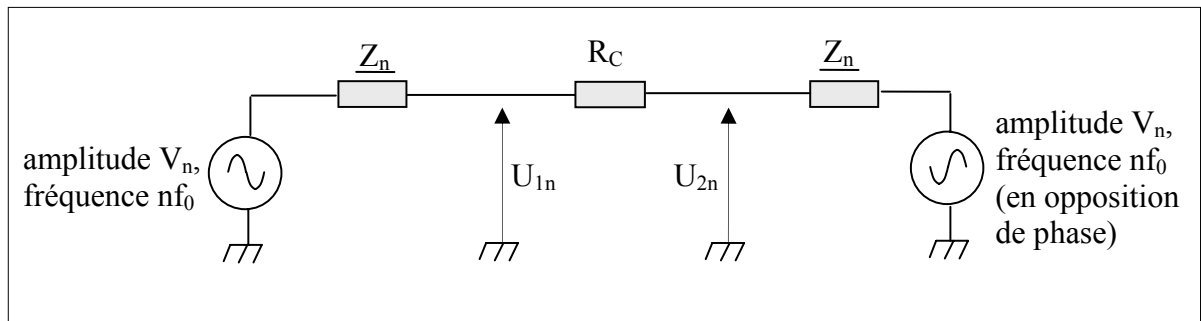


Figure 18 : Schéma électrique équivalent au schéma de la figure 17

Question 26 : Calculer l'impédance complexe \underline{Z}_n et la tension complexe \underline{V}_n de module V_n de la source de gauche à la fréquence $n\omega_0$. La tension complexe de la source de droite est égale à $-\underline{V}_n$, en déduire la tension complexe $(\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n})$ aux bornes de la charge R_C à la fréquence $n\omega_0$.

$$\text{Montrer que : } |\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n}| = \frac{2|E_n|}{\sqrt{\left(1 - LC(n\omega_0)^2\right)^2 + \left(\frac{2Ln\omega_0}{R_C}\right)^2}} \quad (6)$$

Question 27 : On pose $LC(\omega_R)^2 = 1$ et $R_C C \omega_R = Q$, montrer que la relation (6) se met sous la forme suivante:

$$|\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n}| = \frac{2|E_n|}{\sqrt{\left(1 - n^2\left(\frac{\omega_0}{\omega_R}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2}{Q}n\left(\frac{\omega_0}{\omega_R}\right)\right)^2}} \quad (7)$$

On reconnaît le module du gain complexe d'un filtre passe bas du deuxième ordre où ω_R est la pulsation caractéristique et $Q/2$ le coefficient de surtension. Typiquement, pour un amplificateur audio fréquence classe D on prendra $f_R = \frac{\omega_R}{2\pi} \approx 20 \text{ kHz}$ et $Q/2 \approx 1$. On rappelle que pour un filtre de Butterworth $Q/2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f_R = f_{-3\text{dB}}$.

Question 28 : Calculer la nouvelle valeur du champ électrique ξ rayonné à 10 m, en V/m et en $\text{dB}\mu\text{V/m}$, à la fréquence de 100 MHz par un des fils, supposé isolé, de longueur 50 cm reliant l'amplificateur à une résistance $R_C = 8 \Omega$. La tension d'alimentation V_{DD} étant égale à 10 V, comparer la valeur trouvée à celle obtenue à la question 25.

Question 29 : Quel est approximativement le rendement η :

$$\eta = \frac{\text{Puissance du fondamental}}{\text{Puissance fournie par l'alimentation } V_{CC}}$$

En pratique, les fils reliant l'amplificateur au haut parleur ne sont pas isolés, ils sont près l'un de l'autre ce qui diminue l'intensité du champ rayonné. Pour réduire le rayonnement, il faut "twister" les fils, c'est-à-dire faire en sorte que les fils aller et retour du courant soient confondus (voir le théorème d'Ampère). Un blindage des câbles diminue encore le rayonnement. Les fils ne sont pas les seuls éléments rayonnant, les boucles rayonnent également.

IV- Les amplificateurs classe D sans filtre

Les filtres $L-C$ sont encombrants et coûteux, ce qui est un handicap pour la miniaturisation des amplificateurs des systèmes audio portables. Il existe cependant une solution alternative aux filtres $L-C$ pour réduire le rayonnement des amplificateurs classe D de faible puissance: la technique d'étalement de spectre (spread spectrum). Aujourd'hui, la plupart des fabricants de CI classe D proposent des CI sans filtre (filterless class D amplifier). Diverses techniques d'étalement de spectre sont utilisées pour diminuer le rayonnement, elles consistent dans tous les cas à répartir l'énergie dans le domaine des fréquences pour que le champ électrique rayonné, à une fréquence particulière, reste inférieur à la norme CEM comme le montre la figure 19.

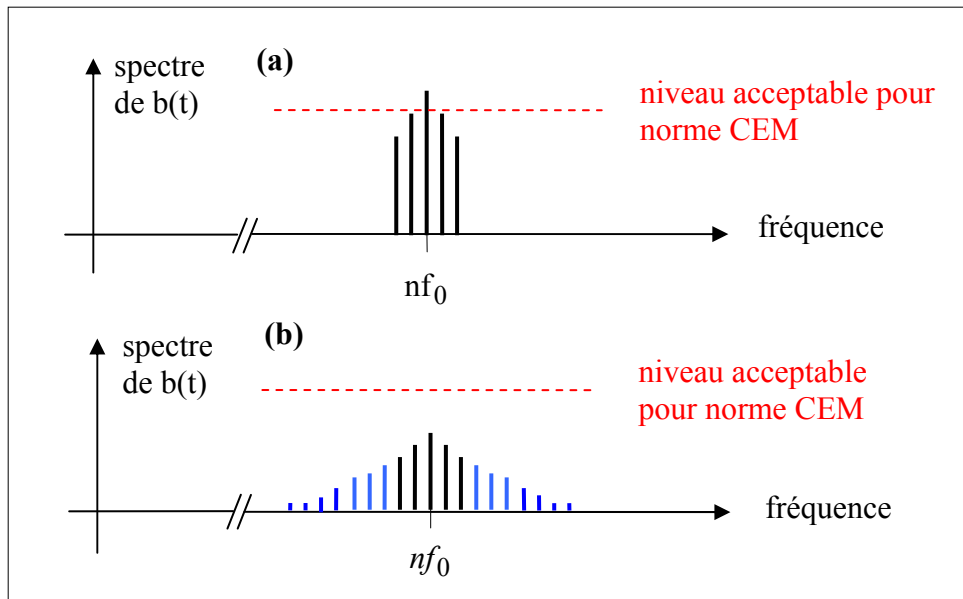


Figure 19 : Spectre du signal $b(t)$ de commande du pont en H, (a) le spectre est concentré autour de nf_0 et le rayonnement émis à la fréquence nf_0 est supérieur à la norme CEM, (b) en étalant le spectre autour de nf_0 , le champ électrique rayonné est atténué et la norme CEM est respectée.

Nous donnons ci-dessous deux exemples de CI classe D utilisant deux techniques d'étalement différentes.

- Circuit intégré MAX9700 de Maxim : 1,2 W , Low-EMI, Filterless, Class D Audio Amplifier
- Circuit intégré SSM2301 d'Analog Device : Filterless High Efficiency, Mono 1,4 W , Class-D Audio Amplifier

Dans le CI MAX9700, l'étalement de spectre est obtenu en faisant varier aléatoirement dans le temps la fréquence des dents de scie, la fréquence varie de ± 120 kHz autour de 1,22 MHz. Cette technique s'appuie sur les techniques de modulation de fréquence et/ou de phase. En effet, pour une onde modulée en fréquence ou en phase, l'amplitude de la porteuse de fréquence F_p est réduite en présence d'un modulant. Dans le cas particulier d'un modulant sinusoïdal de fréquence F_m , on observe des raies équidistantes de F_m et réparties symétriquement par rapport à la porteuse F_p : c'est la base de l'étalement de spectre. L'encombrement spectral ΔF dépend de l'indice de modulation m et est donné par la formule de Carson : $\Delta F \approx 2(m+1)F_m$. L'étalement de spectre est par exemple utilisé pour réduire le rayonnement des horloges, voir par exemple les CI (Spread Spectrum Clock Generator) de la société Cypress [2]. Dans les horloges à étalement de spectre le but recherché est d'obtenir le spectre le plus plat dans une largeur de bande donnée. A cet effet il faut utiliser un modulant non sinusoïdal. Dans les CI de Cypress, c'est une modulation de phase à base de PLL (Phase-Locked Loop) qui est utilisée [3].

Sur la base de ce concept, on peut intuitivement comprendre qu'en faisant varier la fréquence f des dents de scie du modulateur PWM on obtiendra un spectre étalé.

La figure 20 montre respectivement les spectres avant (mode FFM pour Fixed-Frequency Modulation) et après (mode SSM Spread-Spectrum Modulation) étalement du CI MAX9700. Après étalement, on observe une diminution des amplitudes et un élargissement des pics.

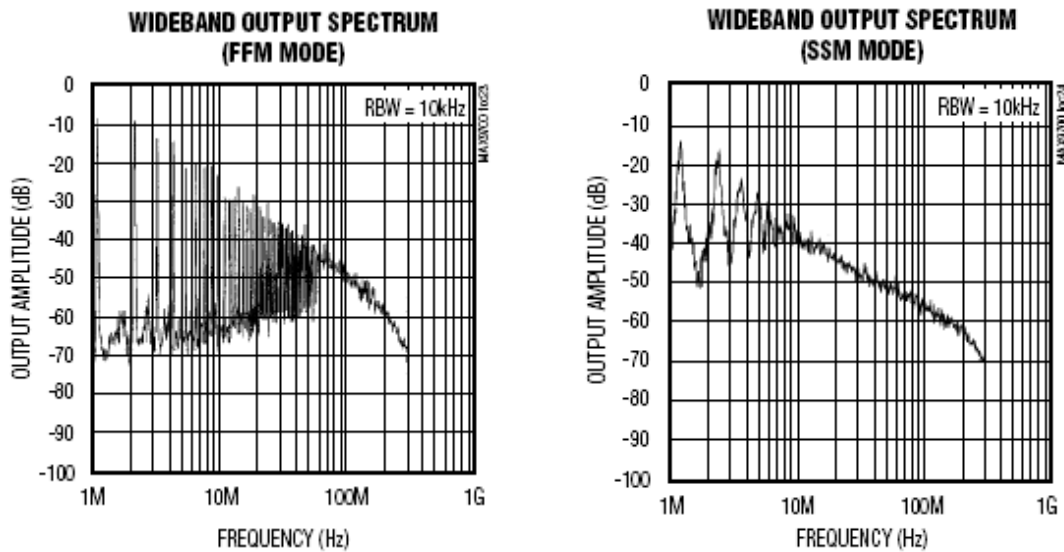


Figure 20 : Spectres mesurés entre la masse et une des sorties du pont en H du signal de commande du MAX9700. Copyright Maxim Integrated Products (<http://www.maxim-ic.com>) used by permission

Dans le CI SSM2301, l'étalement de spectre est obtenu par une modulation Delta Sigma (Σ - Δ modulator) très utilisée en conversion analogique numérique [4]. Le synoptique d'un modulateur Delta Sigma est rappelé à la figure 21 : la boucle est telle que la sortie de l'intégrateur est constamment ramenée vers zéro, la fréquence f_E de suréchantillonnage doit être très supérieure à la fréquence du signal $e(t)$. Le signal $b(t)$ généré est une suite d'états prenant deux niveaux, la durée minimum d'un état est égale à f_E : la fréquence de suréchantillonnage. La modulation Delta Sigma est réputée pour mieux étaler le spectre que la modulation PWM.

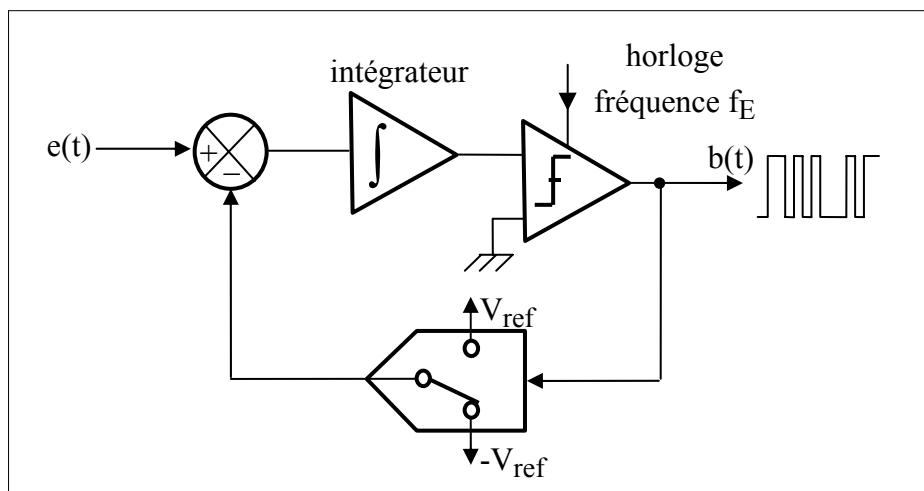


Figure 21 : Structure d'un modulateur Delta Sigma

Les taux de distorsion des circuits MAX9700 et SSM2301 sont très similaires, de l'ordre de 0,1%, comme le montre les graphes des figures 22 et 23. Le taux de distorsion augmente rapidement quand l'amplitude du signal $e(t)$ devient plus grande que l'amplitude des dents de scie.

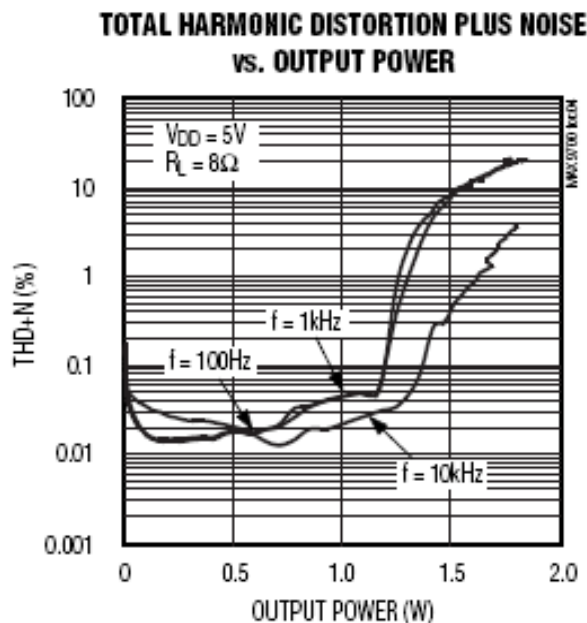


Figure 22 : Taux de distorsion + bruit (THD+N pour Total Harmonic Distorsion + Noise) du CI MAX9700 en fonction de la puissance de sortie pour trois fréquences du signal audio. Copyright Maxim Integrated Products (<http://www.maxim-ic.com>) used by permission

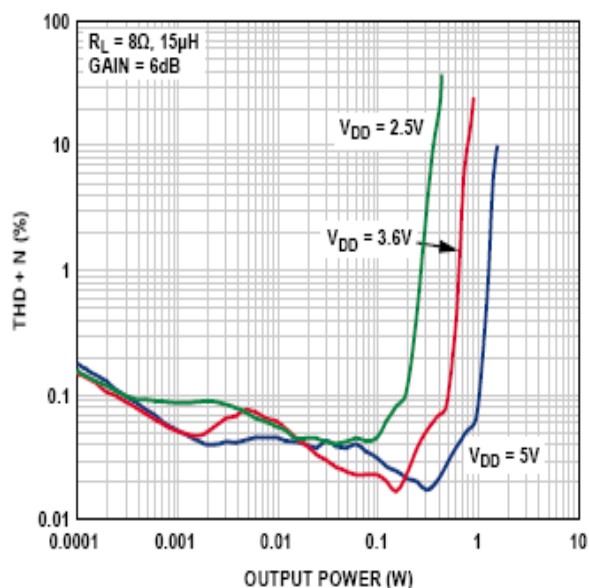


Figure 23 : Taux de distorsion + bruit (THD+N pour Total Harmonic Distorsion + Noise) du SSM2301 à la fréquence audio de 2 kHz en fonction de la puissance de sortie pour trois tensions d'alimentation. Copyright Analog Devices (<http://www.analog.com>) used by permission

Les rendements des circuits MAX9700 et SSM2301 sont voisins de 90% comme le montrent les graphes des figures 24 et 25. Les temps de commutation des transistors ne sont pas nuls, il s'ensuit qu'ils dissipent un peu de puissance.

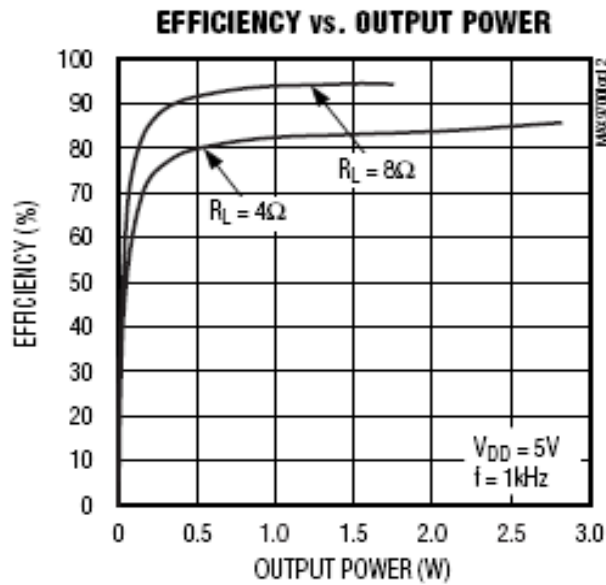


Figure 24 : Rendement du MAX9700 en fonction de la puissance de sortie pour deux valeurs de la résistance de charge R_L . Copyright Maxim Integrated Products (<http://www.maxim-ic.com>) used by permission

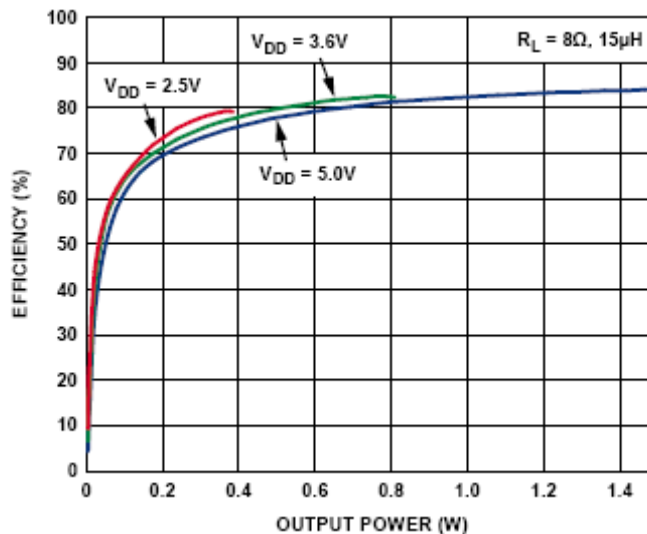


Figure 25 : Rendement du SSM2301 en fonction de la puissance de sortie pour trois tensions d'alimentation et une charge $R_L = 8\Omega$ en série avec une inductance de $15\mu H$. Copyright Analog Devices (<http://www.analog.com>) used by permission

La figure 26 montre le champ électrique rayonné à 10m pour le CI MAX9705 de Maxim (2,3W Ultra-low-EMI, Filterless, class D Audio Amplifier). L'étalement de spectre conduit à un rayonnement quasiment blanc, il est bien inférieur à la norme CEM.

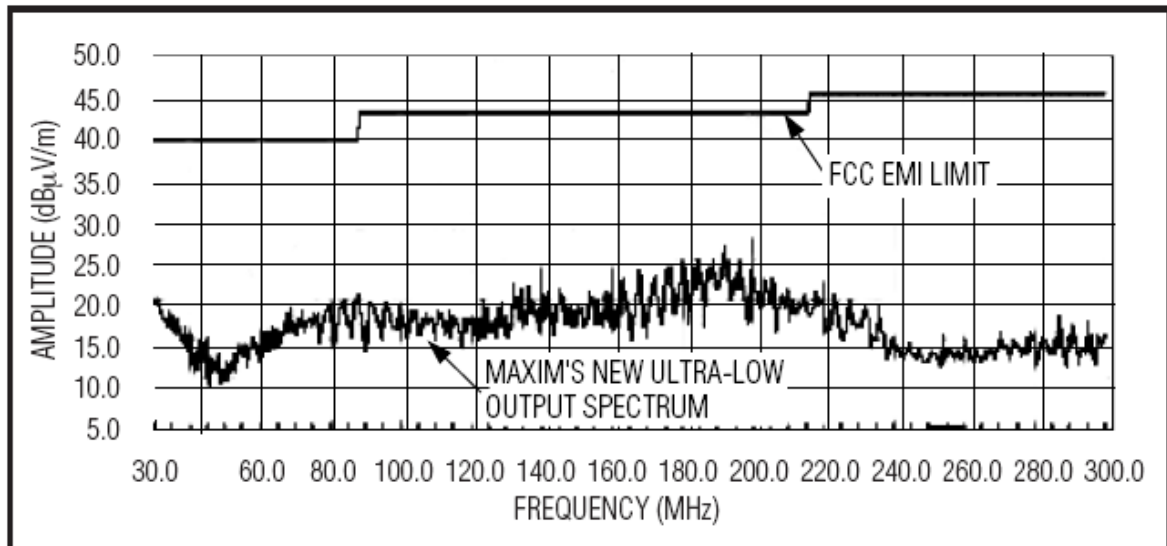


Figure 26 : Champ électrique rayonné à 10m par le CI MAX9705. Copyright Maxim Integrated Products (<http://www.maxim-ic.com>) used by permission

L'étalement de spectre n'élimine pas les fréquences élevées situées au delà de la bande audio fréquence. Compte tenu de la bande passante de l'oreille, ces fréquences ne sont pas audibles, reste le problème du rendement. En effet, si la charge constituée par le haut parleur était résistive, et égale à R_C sur tout le domaine de fréquence, elle dissiperait de l'énergie en dehors de la bande audio fréquence et le rendement ne serait pas voisin de 90%. Un haut parleur électrodynamique a, du fait de son bobinage, un comportement inductif dans le domaine des hautes fréquences. La plupart des courbes présentées dans les notices techniques sont obtenues en utilisant une charge constituée d'une résistance $R_C = 8\Omega$ (ou 4Ω) en série avec une inductance $L_C = 68\mu\text{H}$ (ou $33\mu\text{H}$). La fréquence de coupure, $1/(2\pi L_C / R_C)$, est donc voisine de la limite supérieure de la bande audio fréquence. Le comportement inductif du haut parleur est aussi bénéfique pour réduire le rayonnement puisqu'il limite le courant aux hautes fréquences. La figure 27 montre le module de l'impédance d'un "boomer", c'est-à-dire d'un haut parleur basses fréquences. Le pic aux basses fréquences correspond à la résonance mécanique de la membrane, la remontée dans la partie haute fréquence est due à l'inductance du bobinage.

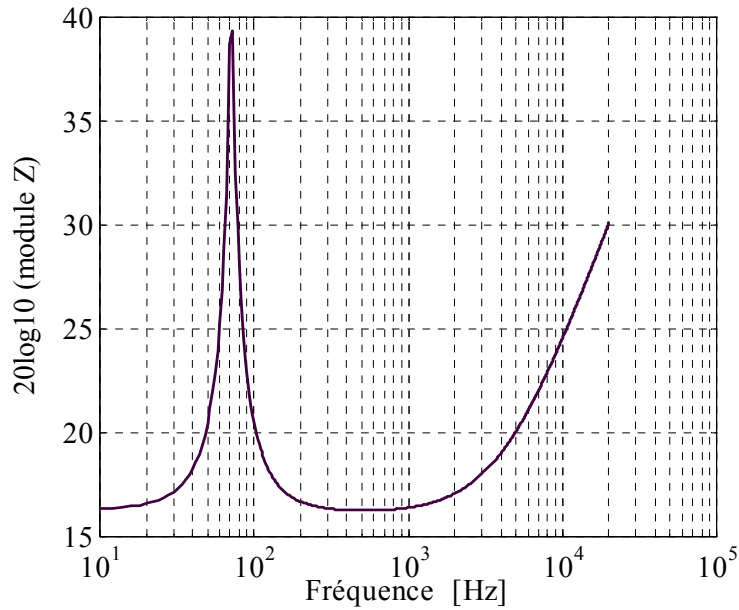


Figure 27 : Courbe typique du module de l'impédance Z d'un haut parleur basses fréquences

Pour les amplificateurs classe D de fortes puissances, la seule technique d'étalement de spectre peut se révéler insuffisante pour satisfaire les normes CEM, il faut généralement dans ce cas mettre en série avec le haut parleur une ferrite (ferrite bead) pour respecter les normes CEM. Cette solution est néanmoins très avantageuse comparée à celle nécessitant un filtre avec des inductances coûteuses et volumineuses comme le requiert un simple PWM sans étalement. La figure 28 montre, à titre d'exemple, le rayonnement à 10m du CI MAX9741 de Maxim (12W Stereo, Low-EMI, Spread Spectrum, Class D Amplifier).

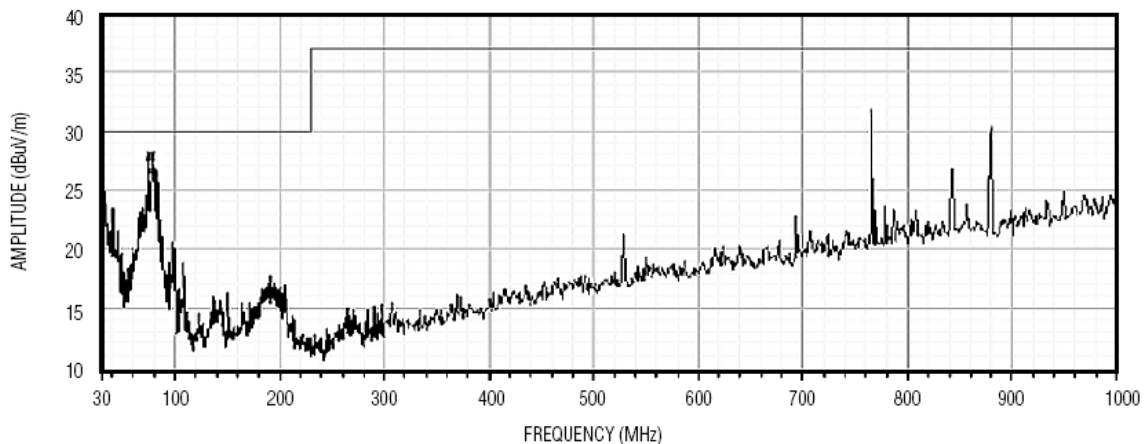


Figure 28 : Champ électrique rayonné à 10m en chambre anéchoïque par le CI MAX9705 avec des câbles de 0,5m. Une ferrite est mise en série avec la charge. Copyright Maxim Integrated Products (<http://www.maxim-ic.com>) used by permission

V- Conclusion

L'apprentissage de l'électronique se révèle un art difficile. En effet la manipulation des grandeurs analogiques nécessite souvent des prérequis et de l'expérience. Il est cependant un domaine où il est relativement facile de capter l'attention des étudiants : celui de l'audio visuel et depuis peu celui des économies d'énergies. Ne parle-t-on pas aujourd'hui d'écoconception ? L'amplificateur audio fréquence et plus particulièrement l'amplificateur classe D s'inscrit dans ces deux thématiques.

L'étude de l'amplificateur classe D permet de revisiter les circuits (Thévenin, superposition), de calculer des puissances, d'appliquer les séries de Fourier à un cas concret, de calculer un filtre, des taux de distorsion, d'aborder la CEM et si on le souhaite de discuter du comportement en fréquence des composants passifs.

Un projet intéressant à développer avec les étudiants est la conception d'une chaîne de traitement audio fréquence : un micro à électret et son amplificateur, un DSP (Digital Signal Processor), un amplificateur classe D et un haut parleur. Depuis plusieurs années nous proposons aux étudiants un TP sur les filtres numériques construit autour d'un DSP. Le TP permet de comparer les processeurs à virgule fixe et flottante, d'étudier le rôle du filtre antirepliement et de comparer les filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) et RII (Réponse Impulsionnelle Infinie). Ce TP a gagné en intérêt depuis que nous avons supprimé quelques questions académiques pour y inclure la génération d'un écho : les étudiants parlent devant le micro et peuvent ainsi entendre l'effet produit. L'amplificateur de puissance utilisé est un amplificateur classe D, le MAX9705.

L'étude en TD de physique du fonctionnement des micros et hauts parleurs est aussi intéressante car c'est l'occasion de marier les disciplines comme la mécanique et l'électromagnétisme.

Bibliographie :

[1] Micro-ondes, Tome 2, Circuits passifs, propagation, antennes, P. F. Combes, chapitre 11, pages 197-222, Dunod (1997)

[2] www.cypress.com, mots clés : Spread Spectrum Clock Generator

[3] De la boucle à verrouillage de phase à la CEM : les horloges à étalement de spectre, G. Couturier, C. Pécoste, L. Reydellet et J. Rolland, GeSi, Revue des départements Génie Electrique et Informatique Industrielle – IUT, n° 65, pages 9-18, (2005)

[4] Principes de conversions analogique-numérique et numérique-analogique, J. P. Troadec, pages 101-111, Dunod (2004)

Datasheet et Application Notes

Mots clés : class D amplifieur, audio switching amplifieur, low-EMI (ElectroMagnetic Interference), filterless

www.analog.com, www.maxim-ic.com, www.national.com et www.ti.com

L'auteur : Gérard Couturier, ingénieur ENSEIRB (Ecole Nationale Supérieure d'Electronique, Informatique et Radiocommunications de Bordeaux), est professeur des universités à l'IUT Bordeaux1 au département GEII (Génie Electrique et Informatique Industrielle) où il enseigne l'électronique, le traitement du signal et la physique. Il est également chercheur au CPMOH (Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne) dans le groupe nanophysique par sonde locale. Ses activités de recherche actuelles sont orientées vers l'étude des propriétés mécaniques de matériaux biologiques par QCM-D (Quartz Crystal Microbalance with Dissipation).

Corrigé

I- Amplificateurs de puissance classe A et AB

Question 1 : Puissance P_{S0} fournie par l'alimentation V_{CC} quand $e(t) = 0$:

$$P_{S0} = V_{CC} \frac{V_{CC}}{2R_C} = \frac{V_{CC}^2}{2R_C}$$

Puissance P_{C0} dissipée dans la charge R_C :
$$P_{C0} = \frac{V_{CC}}{2} \frac{V_{CC}}{2R_C} = \frac{V_{CC}^2}{4R_C}$$

Question 2 : Expression du courant $I_C(t)$ de collecteur :
$$I_C(t) = \frac{V_{CC}}{2R_C} + \frac{V_{CC}}{2R_C} \cos(\omega_0 t)$$

Puissance P_C dissipée dans la charge R_C , posons $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$:

$$P_C = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_C I_C^2(t) dt$$

$$P_C = \frac{R_C}{T_0} \frac{V_{CC}^2}{4R_C^2} \int_0^{T_0} (1 + \cos(\omega_0 t))^2 dt = \frac{V_{CC}^2}{4T_0 R_C} \int_0^{T_0} (1 + 2\cos(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) dt$$

$$P_C = \frac{V_{CC}^2}{4T_0 R_C} \int_0^{T_0} \left(1 + 2\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) \right) dt = \frac{V_{CC}^2}{4T_0 R_C} \left(T_0 + \frac{T_0}{2} \right) = \frac{V_{CC}^2}{4R_C} + \frac{V_{CC}^2}{8R_C}$$

$$P_C = P_{C0} + P_{umax} \text{ avec } P_{umax} = \frac{V_{CC}^2}{8R_C}$$

Question 3 : Puissance P_S fournie par l'alimentation V_{CC} quand $e(t) \neq 0$:

$$P_S = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} V_{CC} I_C(t) dt = \frac{V_{CC}}{T_0 2R_C} \int_0^{T_0} (1 + \cos(\omega_0 t)) dt = \frac{V_{CC}}{T_0 2R_C} T_0 \text{ d'où : } P_S = \frac{V_{CC}^2}{2R_C} = P_{S0}$$

Question 4 : Rendement
$$\eta_{max} = \frac{P_{umax}}{P_S} = \frac{\frac{V_{CC}^2}{8R_C}}{\frac{V_{CC}^2}{2R_C}} = \frac{1}{4}$$
 soit 25%. Le taux de distorsion est nul,

dans l'hypothèse de linéarité.

Question 5 : Le rendement η est égal à : $\eta = \frac{P_u}{P_S}$ où P_u et P_S sont respectivement la puissance utile et la puissance fournie par l'alimentation V_{CC} . Soit

$I_C(t) = \frac{V_{CC}}{2R_C} + I_m \cos(\omega_0 t)$ avec $I_m \leq \frac{V_{CC}}{2R_C}$, le courant dans la charge R_C . La puissance

P_S fournie par l'alimentation s'écrit :

$$P_S = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} V_{CC} \left(\frac{V_{CC}}{2R_C} + I_m \cos(\omega_0 t) \right) dt = \frac{V_{CC}^2}{2R_C} = 4P_{u\max}, \text{ d'où le rendement } \eta :$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{4} \frac{P_u}{P_{\max}}}$$

Question 6 : Puissance P_{S1} fournie par l'alimentation $+V_{CC}$:

$$P_{S1} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_{CC} \frac{V_{CC}}{R_C} \sin(\omega_0 t) dt$$

$$P_{S1} = \frac{V_{CC}^2}{T_0 R_C} \int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t) dt = \frac{V_{CC}^2}{T_0 R_C} \left[-\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \right]_0^{T_0/2} = \frac{V_{CC}^2}{T_0 R_C} \left[\frac{-(-1) + (1)}{\frac{2\pi}{T_0}} \right]$$

d'où : $\boxed{P_{S1} = \frac{V_{CC}^2}{\pi R_C}}$

La puissance totale P_S fournie par les alimentations $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$ est égale à :

$$\boxed{P_S = 2P_{S1} = \frac{2V_{CC}^2}{\pi R_C}}$$

Question 7 : Puissance utile $P_{u\max}$ dissipée dans la charge :

$$P_{u\max} = 2 \left\{ \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} R_C \left(\frac{V_{CC}}{R_C} \sin(\omega_0 t) \right)^2 dt \right\} = \frac{2V_{CC}^2}{T_0 R_C} \int_0^{T_0/2} \sin^2(\omega_0 t) dt$$

$$P_{u\max} = \frac{2V_{CC}^2}{T_0 R_C} \int_0^{T_0/2} (1 - \cos^2(\omega_0 t)) dt = \frac{2V_{CC}^2}{T_0 R_C} \int_0^{T_0/2} \left(1 - \frac{1}{2} - \cos(2\omega_0 t) \right) dt$$

$$P_{u\max} = \frac{2V_{CC}^2}{T_0 R_C} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right]_0^{T_0/2} = \frac{2V_{CC}^2}{T_0 R_C} \left[\frac{T_0}{4} - 0 \right]$$

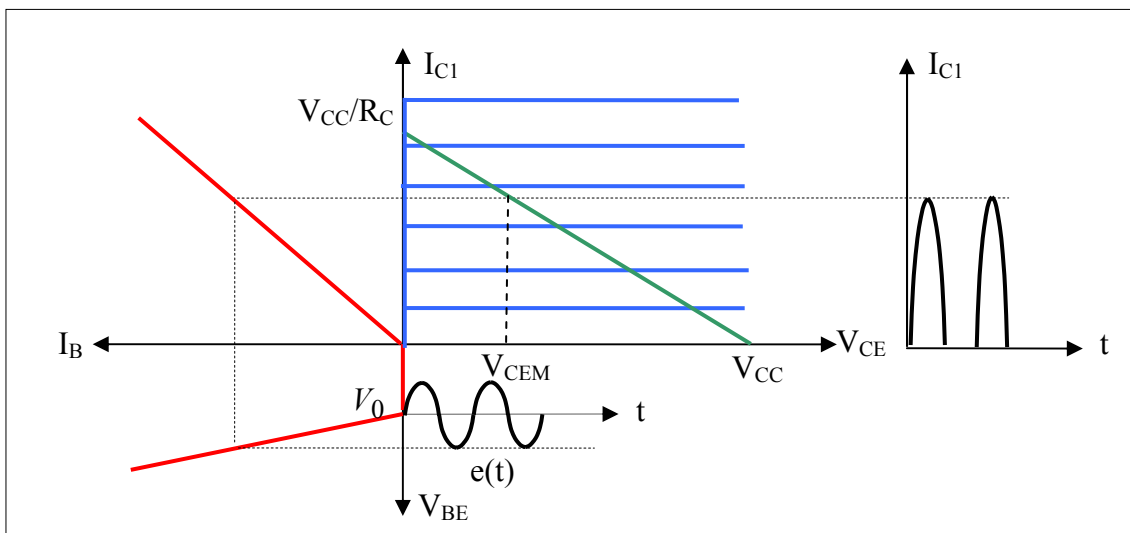
d'où :
$$P_{\text{umax}} = \frac{V_{CC}^2}{2R_C}$$

Question 8 : Rendement
$$\eta_{\text{max}} = \frac{P_{\text{umax}}}{P_S} = \frac{\frac{V_{CC}^2}{2R_C}}{\frac{2V_{CC}^2}{\pi R_C}} = \frac{\pi}{4} \text{ soit } \approx 78\%$$

Le taux de distorsion reste nul dès lors que la tension de seuil des transistors est compensée (classe AB).

Question 9 : Soit V_{CEM} la tension aux bornes du transistor T_1 quand le courant I_{C1} est maximum. La puissance P_S fournie par les deux alimentations $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$ s'écrit :

$$P_S = 2 \left\{ \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V_{CC} \left(\frac{V_{CC} - V_{CEM}}{R_C} \right) \sin(\omega_0 t) dt \right\} = \frac{2V_{CC}(V_{CC} - V_{CEM})}{\pi R_C}$$



La puissance totale P_u fournie à la charge s'écrit :

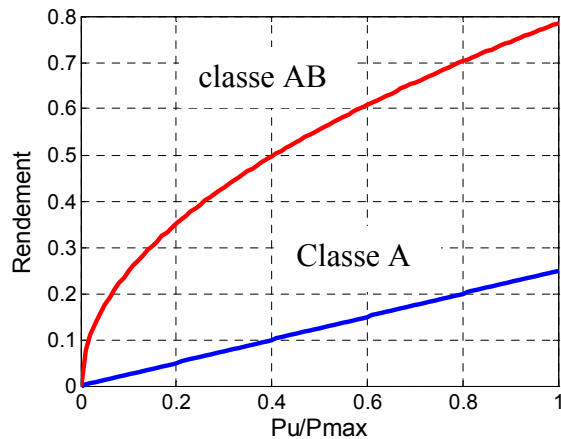
$$P_u = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_C \left[\frac{(V_{CC} - V_{CEM})}{R_C} \sin(\omega_0 t) \right]^2 dt = \frac{(V_{CC} - V_{CEM})^2}{2R_C}$$

Le rendement η est égal à : $\eta = \frac{\pi (V_{CC} - V_{CEM})}{4 V_{CC}}$, montrons que $\frac{(V_{CC} - V_{CEM})}{V_{CC}} = \sqrt{\frac{P_u}{P_{\text{max}}}}$.

Ecrivons que $(V_{CC} - V_{CEM}) = \sqrt{2R_C P_u}$, d'après la question 7, $P_{\text{umax}} = \frac{V_{CC}^2}{2R_C}$, il s'ensuit que :

$$(V_{CC} - V_{CEM}) = \sqrt{\frac{V_{CC}^2}{P_{u\max}} P_u}, \text{ d'où : } \frac{(V_{CC} - V_{CEM})}{V_{CC}} = \sqrt{\frac{P_u}{P_{\max}}}. \text{ Le rendement } \eta \text{ varie donc}$$

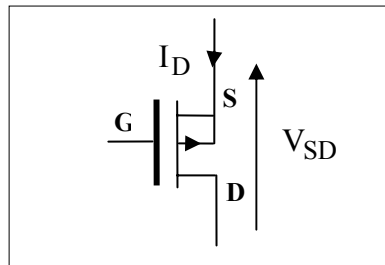
comme la racine carrée du rapport $\frac{P_u}{P_{u\max}}$, $\eta = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{P_u}{P_{\max}}}$



Rendements en classe A et AB en fonction du rapport $P_u / P_{u\max}$

II- Préliminaires à l'amplificateur classe D

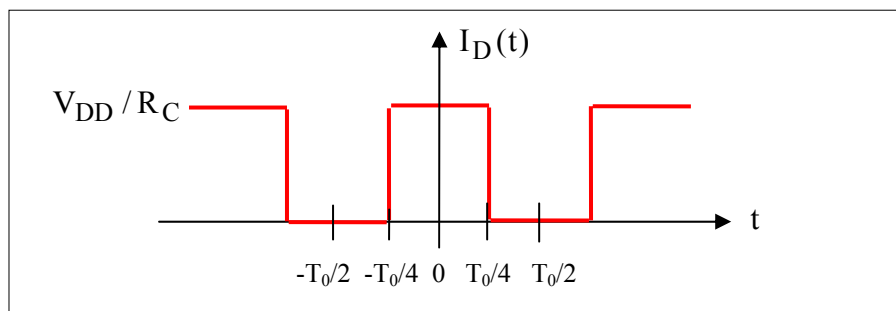
Question 10 :



Transistor saturé : $V_{SD} = 0$ et $I_D \neq 0$ d'où puissance dissipée = 0

Transistor bloqué : $V_{SD} \neq 0$ et $I_D = 0$ d'où puissance dissipée = 0

Question 11 :



Puissance fournie par l'alimentation V_{DD} : $P_S = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} V_{DD} \frac{V_{DD}}{R_C} dt = \frac{V_{DD}^2}{T_0 R_C} [t]_{-T_0/4}^{T_0/4}$

d'où : $P_S = \frac{V_{DD}^2}{2R_C}$

Question 12 : Décomposition en série de Fourier de $I_D(t)$:

Valeur moyenne : $I_m = \frac{\frac{V_{DD}}{R_C} \frac{T_0}{2}}{T_0} = \frac{V_{DD}}{2R_C}$

Coefficient I_n :

$$I_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} I_D(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} \frac{V_{DD}}{R_C} \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{4V_{DD}}{T_0 R_C} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T_0/4}$$

$$I_n = \frac{4V_{DD}}{T_0 R_C} \left[\frac{\sin(n \frac{\pi}{2})}{n \frac{2\pi}{T_0}} \right] \text{ soit : } I_n = \frac{2V_{DD}}{\pi R_C} \frac{1}{n} \sin(n \frac{\pi}{2})$$

d'où le courant $I_D(t)$:

$$I_D(t) = \frac{V_{DD}}{R_C} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

Question 13 : Puissance du fondamental :

$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} R_C \left(\frac{2V_{DD}}{\pi R_C} \cos(\omega_0 t) \right)^2 dt = \frac{4V_{DD}^2}{T_0 \pi^2 R_C} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{2V_{DD}^2}{T_0 \pi^2 R_C} T_0$$

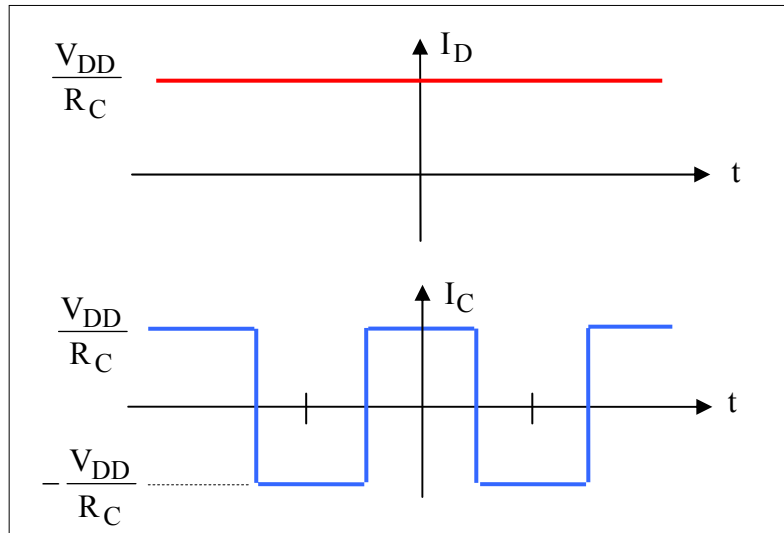
d'où : $P_f = \frac{2V_{DD}^2}{\pi^2 R_C}$

Le rendement η est égal à : $\eta = \frac{P_f}{P_S} = \frac{\frac{2V_{DD}^2}{\pi^2 R_C}}{\frac{V_{DD}^2}{2R_C}} = \frac{4}{\pi^2}$ soit 40%

Question 14 : Taux de distorsion : $D = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\frac{5\pi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\frac{7\pi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\frac{9\pi}{2}}\right)^2 + \dots}$

ou encore :
$$D = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0,48 \text{ soit } 48\%$$

Question 15 :



Question 16 : Puissance P_S fournie par l'alimentation : $P_S = V_{DD} \frac{V_{DD}}{R_C}$ soit $P_S = \frac{V_{DD}^2}{R_C}$

Question 17 : La série de Fourier se déduit de la question 12 :

- la valeur moyenne est nulle

- L'amplitude est maintenant égale à $\frac{2V_{DD}}{R_C}$ au lieu de $\frac{V_{DD}}{R_C}$

d'où la série de Fourier de $I_C(t)$:

$$I_C(t) = \frac{2V_{DD}}{R_C} \left[\frac{2}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

Question 18 : La valeur efficace du courant du fondamental est égale à : $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4V_{DD}}{R_C \pi}$, d'où le rendement :

$$\eta = \frac{R_C \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4V_{DD}}{R_C \pi} \right)^2}{\frac{V_{DD}^2}{R_C}} = \frac{8}{\pi^2} \text{ soit } 81\%$$

Question 19 : Le taux de distorsion reste identique à celui de la question 14, soit 48%.

III- Amplificateur classe D

Question 20 : Cherchons l'instant où la dent de scie coupe la sinusoïde, on obtient :

$$A \sin\left(\frac{2\pi}{MT}(pT + \Delta_p)\right) = -A + \frac{2A}{T} \Delta_p, \text{ soit : } \Delta_p = \frac{T}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi}{MT}(pT + \Delta_p)\right) \right]$$

Δ_p a pour valeur maximum T , il s'ensuit que pour $p \gg 1$, on $pT \gg \Delta_p$, en conséquence on

peut écrire :
$$\Delta_p = \frac{T}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi p}{M}\right) \right]$$

Question 21 :

$$a_n = \frac{2B}{MT} \left\{ \int_{0T}^{0T+\Delta_0} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{1T}^{1T+\Delta_1} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{2T}^{2T+\Delta_2} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \dots + \int_{(M-2)T}^{(M-2)T+\Delta_{M-2}} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{(M-1)T}^{(M-1)T+\Delta_{M-1}} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2B}{MT} \left\{ \sum_{p=1}^M \int_{(p-1)T}^{(p-1)T+\Delta_{p-1}} \sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt \right\} = \frac{2B}{MT} \left\{ \sum_{p=1}^M \left[\frac{-\cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right)}{n \frac{2\pi}{MT}} \right]_{(p-1)T}^{(p-1)T+\Delta_{p-1}} \right\}$$

$$a_n = \frac{B}{n\pi} \sum_{p=1}^M \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{M} \left(p-1 + \frac{\Delta_{p-1}}{T}\right)\right) + \cos\left(n \frac{2\pi}{M} (p-1)\right) \right]$$

$$b_n = \frac{2B}{MT} \left\{ \int_{0T}^{0T+\Delta_0} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{1T}^{1T+\Delta_1} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{2T}^{2T+\Delta_2} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \dots + \int_{(M-2)T}^{(M-2)T+\Delta_{M-2}} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt + \int_{(M-1)T}^{(M-1)T+\Delta_{M-1}} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt \right\}$$

$$b_n = \frac{2B}{MT} \left\{ \sum_{p=1}^M \int_{(p-1)T}^{(p-1)T+\Delta_{p-1}} \cos\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right) dt \right\} = \frac{2B}{MT} \left\{ \sum_{p=1}^M \left[\frac{\sin\left(n \frac{2\pi}{MT} t\right)}{n \frac{2\pi}{MT}} \right]_{(p-1)T}^{(p-1)T+\Delta_{p-1}} \right\}$$

$$b_n = \frac{B}{n\pi} \sum_{p=1}^M \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{M} \left(p-1 + \frac{\Delta_{p-1}}{T}\right)\right) - \sin\left(n \frac{2\pi}{M} (p-1)\right) \right]$$

Calcul de la valeur moyenne b_0 :

$$b_0 = B \frac{1}{MT} \left\{ \int_0^{\Delta_0} dt + \int_T^{T+\Delta_1} dt + \dots + \int_{(M-1)T}^{(M-1)T+\Delta_{M-1}} dt \right\} = \frac{B}{MT} \sum_{p=1}^M \Delta_{p-1}$$

$$b_0 = \frac{B}{MT} \frac{T}{2} \sum_{p=1}^M \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) \right] = \frac{B}{2M} \left[M + \sum_{p=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) + \sum_{p=\frac{M}{2}+1}^M \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) \right]$$

Effectuons le changement de variable $u = p - \frac{M}{2}$ dans la deuxième somme :

$$b_0 = \frac{B}{2} + \frac{B}{2M} \left[\sum_{p=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) + \sum_{u=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(u + \frac{M}{2} - 1)}{M}\right) \right]$$

$$b_0 = \frac{B}{2} + \frac{B}{2M} \left[\sum_{p=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) + \sum_{u=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(u-1)}{M} + \pi\right) \right]$$

$$b_0 = \frac{B}{2} + \frac{B}{2M} \left[\sum_{p=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(p-1)}{M}\right) - \sum_{u=1}^{M/2} \sin\left(\frac{2\pi(u-1)}{M}\right) \right] = \frac{B}{2}$$

Question 22 :

%-----Lignes de code Matlab-----

%--Calcul des coefficients sn de la série de Fourier d'un signal PWM--

clear all;

format long;

%B = amplitude

B=1;

%N = nombre de coefficients sn calculées

N=500;

%f0 = fréquence du signal e(t)

f0=2e3;

%f = fréquence des dents de scie

f=400e3;

%M = nombre de périodes T=1/f

M=f/f0;

%Calcul des an et bn

for n=1:N

 a(n)=0;

 b(n)=0;

 for p=1:M

 a(n)=a(n)+(-cos((n*2*pi/M)*(p-1+0.5*(1+sin(2*pi*(p-1)/(M)))))+cos((n*2*pi/M)*(p-1)));

 b(n)=b(n)+(sin((n*2*pi/M)*(p-1+0.5*(1+sin(2*pi*(p-1)/(M)))))-sin((n*2*pi/M)*(p-1)));

```

end
a(n)=(B/(n*pi))*a(n);
b(n)=(B/(n*pi))*b(n);
%calcul des coefficients sn=sqrt(an^2+bn^2)
s(n)=sqrt((a(n)^2)+(b(n)^2));
end
%Tracés
%axe des fréquences,
x=f0*(1:1:N);
figure(1);bar(x,s,0.04);
figure(2);plot(x,log10(s));
%calcul du taux de distorsion dans la bande Fmin=20Hz - Fmax=20kHz
Fmax=20e3;
y=0;
for k=1:Fmax/f0
y=y+((s(k+1)/s(1))^2);
end
tau=sqrt(y)*100

```

Question 23 :

Les signaux S_1 et S_2 vérifient l'égalité $S_1 + S_2 = V_{DD}$.

Par ailleurs, $S_1 = \frac{V_{DD}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$ avec $E_n = s_n \frac{V_{DD}}{B}$

$$\text{D'où : } S_2 = V_{DD} - \left\{ \frac{V_{DD}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \right\}$$

$$\text{Ou encore : } S_2 = \frac{V_{DD}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n - \pi)$$

$$\text{Il s'ensuit que : } (S_1 - S_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2E_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Question 24 :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--|------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| Log10(s_n) | -0,3 | -2,4 | -4,4 | -6,2 | -8 | -9,8 | -11,5 | -13,3 | -14,7 | -14,7 |
| s_n | 0,5 | $3,9 \cdot 10^{-3}$ | $4,6 \cdot 10^{-5}$ | $6,4 \cdot 10^{-7}$ | 10^{-8} | $1,6 \cdot 10^{-10}$ | $2,7 \cdot 10^{-12}$ | $5 \cdot 10^{-14}$ | $1,9 \cdot 10^{-15}$ | $1,9 \cdot 10^{-15}$ |
| E_n | 5 | $3,9 \cdot 10^{-2}$ | $4,6 \cdot 10^{-4}$ | $6,4 \cdot 10^{-6}$ | 10^{-7} | $1,6 \cdot 10^{-9}$ | $2,7 \cdot 10^{-11}$ | $5 \cdot 10^{-13}$ | $1,9 \cdot 10^{-14}$ | $1,9 \cdot 10^{-14}$ |
| Amplitude des harmoniques de ($S_1 - S_2$) | 10 | $7,8 \cdot 10^{-2}$ | $9,2 \cdot 10^{-4}$ | $1,2 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-7}$ | $3,2 \cdot 10^{-9}$ | $5,4 \cdot 10^{-11}$ | 10^{-12} | $3,8 \cdot 10^{-14}$ | $3,8 \cdot 10^{-14}$ |

d'où le taux de distorsion :

$$D = \sqrt{\left(\frac{7,810^{-2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{9,210^{-4}}{10}\right)^2 + \left(\frac{1,210^{-5}}{10}\right)^2 + \dots} \approx 7,8 \times 10^{-3} \text{ soit } 0,78\%$$

Question 25 :

A la fréquence de 100 MHz, l'indice n est égal à $n = \frac{100 \times 10^6}{2 \times 10^3} = 5 \times 10^4$. D'après la figure 14, l'amplitude s_{50000} est égale à $\approx 1,3 \text{ mV}$ pour $B = 1 \text{ V}$. Pour une tension d'alimentation $V_{DD} = 10 \text{ V}$, on a donc $E_{50000} = \frac{1,3 \times 10^{-3} \times 10}{1} = 13 \text{ mV}$. A la fréquence de 100 MHz, Le courant I traversant la charge $R_C = 8 \Omega$ est donc égal à $\frac{2 \times 13 \times 10^{-3}}{8} = 3,25 \text{ mA}$.

Le champ électrique ξ rayonné à $r = 10 \text{ m}$ est égal à :

$$\xi = \frac{Z_0 \ell I}{2 \lambda r} = \frac{377 \times 0,5 \times 3,25 \times 10^{-3}}{2 \times \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} \times 10} \approx 10,3 \text{ mV/m} \text{ soit } 80 \text{ dB}\mu\text{V/m}$$

C'est une valeur bien supérieure aux normes CEM.

Question 26 :
$$\underline{Z_n} = \frac{jL n \omega_0 \frac{1}{jC n \omega_0}}{jL n \omega_0 + \frac{1}{jC n \omega_0}} = \frac{jL n \omega_0}{1 - LC(n \omega_0)^2}$$

$$\underline{V_n} = \frac{\frac{1}{jC n \omega_0}}{jL n \omega_0 + \frac{1}{jC n \omega_0}} \underline{E_n} = \frac{1}{1 - LC(n \omega_0)^2} \underline{E_n} \text{ avec } \underline{E_n} = E_n e^{jn \omega_0 t}$$

Appliquons le théorème de superposition :

$$\underline{U_{1n}} = \frac{R_C + \underline{Z_n}}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n} - \frac{\underline{Z_n}}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n} = \frac{R_C}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n}$$

$$\underline{U_{2n}} = -\frac{R_C + \underline{Z_n}}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n} + \frac{\underline{Z_n}}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n} = -\frac{R_C}{R_C + 2\underline{Z_n}} \underline{V_n}$$

d'où : $\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n} = \frac{2R_C}{R_C + 2\underline{Z}_n} \underline{V}_n$, on remplace \underline{Z}_n et \underline{V}_n par leurs expressions et on obtient :

$$\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n} = \frac{2R_C}{R_C + 2 \frac{jLn\omega_0}{(1-LC(n\omega_0)^2)}} \frac{1}{(1-LC(n\omega_0)^2)} E_n$$

$$\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n} = \frac{2R_C}{R_C(1-LC(n\omega_0)^2) + 2jLn\omega_0} E_n = \frac{2}{(1-LC(n\omega_0)^2) + 2j \frac{L}{R_C} n\omega_0} E_n$$

$$\text{D'où : } \boxed{|\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n}| = \frac{2}{\sqrt{(1-LC(n\omega_0)^2)^2 + \left(\frac{2L}{R_C} n\omega_0\right)^2}} |E_n|}$$

Question 27 : On pose $LC(\omega_R)^2 = 1$ et $R_C C \omega_R = Q$, d'où :

$$\boxed{|\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n}| = \frac{2|E_n|}{\sqrt{\left(1 - n^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_R}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2}{Q} n \left(\frac{\omega_0}{\omega_R}\right)\right)^2}}$$

Question 28 :

D'après la question 25, à la fréquence de 100 MHz, $n = \frac{100 \times 10^6}{2 \times 10^3} = 5 \times 10^4$ et

$E_{50000} = \frac{1,3 \times 10^{-3} \times 10}{1} = 13 \text{ mV}$. On obtient donc :

$$|\underline{U}_{1n} - \underline{U}_{2n}| = \frac{2 \times 13 \times 10^{-3}}{\sqrt{\left(1 - (5 \times 10^4)^2 \left(\frac{2 \times 10^3}{20 \times 10^3}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2}{1} 5 \times 10^4 \left(\frac{2 \times 10^3}{20 \times 10^3}\right)\right)^2}} \approx 1 \text{ nV}$$

À la fréquence de 100 MHz, le courant I traversant la charge $R_C = 8 \Omega$ est donc égal à $\frac{10^{-9}}{8} = 125 \text{ pA}$.

Le champ électrique ξ rayonné à $r = 10 \text{ m}$ est égal à :

$$\xi = \frac{Z_0 \ell I}{2\lambda r} = \frac{377 \times 0,5 \times 125 \times 10^{-12}}{2 \times \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} \times 10} \approx 0,392 \text{ nV/m} \text{ soit } -68 \text{ dB}\mu\text{V/m}$$

C'est maintenant une valeur bien inférieure aux normes CEM.

NB : Pour faire le calcul, nous avons supposé que les inductances et condensateurs du filtre L – C étaient parfaits, or les inductances et condensateurs ont respectivement des comportements capacitifs et inductifs aux très hautes fréquences dus aux éléments parasites des composants passifs. En conséquence, l'effet du filtrage est moins efficace que celui calculé.

Question 29 :

En dehors de la bande audio 20 Hz – 20 kHz, il n'y a pas de puissance dissipée si on fait l'hypothèse que les inductances et capacités du filtre sont sans perte. Compte tenu du fait que les harmoniques dans la bande audio sont très faibles, le rendement

$$\eta = \frac{\text{Puissance du fondamental}}{\text{Puissance fournie par l'alimentation } V_{CC}} \text{ approche les } 100\%.$$