

Etude théorique, simulation et réalisation d'un Lévitron[®] à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis Comsol Multiphysics[®]

Z. De Grève^{1,2}, C. Versèle¹ et J. Lobry¹

¹Service de Génie Electrique - Faculté Polytechnique de Mons, Bd Dolez, 31 B-7000 Mons (Belgique)

²Fonds de la Recherche Scientifique-FNRS (Aspirant), R. d'Egmont, 5 B-1000 Bruxelles (Belgique)

zacharie.degreve@fpms.ac.be , christophe.versele@fpms.ac.be , jacques.lobry@fpms.ac.be

RESUME : Nous présentons, dans cet article, un projet destiné à des étudiants de deuxième Bachelier Ingénieur dont l'objectif final est la reproduction en laboratoire d'un Lévitron[®], dispositif comprenant une toupie aimantée en lévitation magnétique autonome au dessus d'une base constituée d'aimants permanents, à partir de composants de récupération (aimants annulaires en ferrite de haut-parleurs). Ce projet, prévu pour une durée de 40 heures à l'horaire, débute par une étude théorique permettant aux étudiants de se familiariser avec les modèles employés pour la description du Lévitron[®], ainsi qu'avec d'autres concepts avancés tels que la simulation par éléments finis en électromagnétisme. Ensuite, les étudiants passent par une phase de simulation, débutant par une caractérisation magnétique des différents composants à disposition. Cette étape est menée à bien en comparant mesures expérimentales via l'emploi d'un gaussmètre à effet Hall et simulations obtenues à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis *Comsol Multiphysics 3.4*[®]. Les modèles obtenus pour chaque aimant sont ensuite assemblés et traités via une communication entre les logiciels *Comsol 3.4*[®] et *Matlab 7.1*[®], afin d'obtenir, d'une part, une base aimantée offrant une zone d'équilibre pour la toupie (zone de stabilité) la plus large possible, et, d'autre part, une estimation de la masse de cette dernière. Le projet se termine par la réalisation en laboratoire d'un Lévitron[®], en se basant sur les résultats obtenus lors de l'étape précédente. Pour mener à bien ce travail complet, l'étudiant doit donc allier compréhension de modèles théoriques, ingéniosité dans l'approche logicielle du problème ainsi que rigueur expérimentale.

Mots clés : Lévitation magnétique, Aimants permanents, Simulation par éléments finis, Environnement *Comsol Multiphysics*[®]/*Matlab*[®].

1 INTRODUCTION

Même si, dans la vie de tous les jours, le caractère attractif des interactions magnétiques entre corps est le plus souvent utilisé (électro-aimants de levage, actionneurs, etc.), les forces de répulsion d'origine magnétique n'en demeurent pas moins dénuées d'intérêt. En effet, ces dernières présentent, entre autres, l'avantage certain de pouvoir vaincre la gravité terrestre sans nécessiter aucune structure matérielle. C'est donc tout naturellement que l'ingénieur a été amené à étudier le phénomène de lévitation magnétique.

Cependant, l'impossibilité de maintenir, *de manière statique*, un corps aimanté en lévitation stable dans un champ magnétique fut démontrée dès 1842, grâce au théorème d'Earnshaw¹. Pour pouvoir prétendre à la lévitation magnétique, d'autres techniques, incluant sous diverses formes un aspect dynamique dans le problème, ont donc été envisagées. Parmi celles-ci, citons entre autres le train à lévitation magnétique (*Transrapid* allemand), nécessitant une régulation sophistiquée de la force portante aux moyens de bobines parcourues par des courants réglables, la lévitation par courants

induits de Foucault (une plaque conductrice dans un champ magnétique alternatif est maintenue en lévitation par les forces de Laplace agissant sur les courants induits), la lévitation par supraconducteurs (*Maglev* japonais), ainsi que la lévitation par effet gyroscopique. C'est sur cette dernière que se base le Lévitron[®] (Hones, [1]), que nous allons étudier.

Un Lévitron[®] est constitué d'une base magnétique (*cf. fig. 1*), comprenant une large partie non aimantée au centre (des aimants annulaires peuvent convenir), d'une toupie formée d'un support aimanté et d'un aimant permanent de forme cylindrique ou annulaire, ainsi que d'une plateforme aimantée permettant de venir placer la toupie en rotation dans la zone d'équilibre stable. Cette dernière est le siège de couples gyroscopiques, maintenant son axe dans un alignement presque vertical, de manière à ce que la force de répulsion dipôle-dipôle permette une lévitation stable en évitant l'expulsion de la zone d'équilibre.

L'objectif de ce travail est la réalisation, par un binôme d'étudiants de deuxième Bachelier Ingénieur, d'un Lévitron[®] à partir de composants de récupération, tels que des aimants en ferrite de haut-parleurs. A cet effet, les différents aimants récupérés seront paramétrisés via une étude éléments finis à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*[®], et le couplage avec un modèle comportemental simple du Lévitron[®] permettra d'obtenir une configuration réalisable pour le système.

¹ Théorème excluant l'existence d'extrema de potentiel, indispensables à la présence d'un état d'équilibre stable, pour un système de champs à caractère solénoïdal et irrotationnel, ce qui est notre cas : $\text{div}\vec{B} = 0$; $\text{rot}\vec{H} = \vec{0}$

Tout au long de ce papier, l'accent sera placé sur le champ magnétique engendré par la base et les conditions à respecter pour qu'il y ait lévitation stable. Le modèle comportemental présenté n'est donc pas exhaustif (les aspects mécaniques sont peu abordés), et fournit les bases à la compréhension de la phénoménologie complexe du Levitron[®]. Les auteurs renvoient à [6], [7] et [8] pour des études plus approfondies.

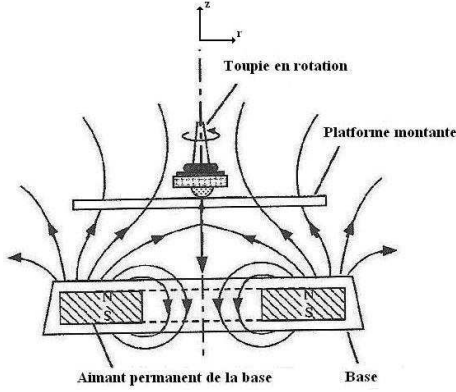


Fig. 1 : Schéma du Levitron[®], avec le système d'axes de référence (r,z) ([2])

2 ORGANISATION DU PROJET

Ce projet, prévu pour une durée de 40 heures, se déroule en plusieurs étapes :

- dans un premier temps, les étudiants abordent une étude théorique leur permettant de se familiariser avec un modèle comportemental simple du Levitron[®], ainsi qu'avec des concepts plus avancés tels que la modélisation par éléments finis en électrotechnique ;
- ils peuvent ensuite aborder la partie simulation, en commençant par identifier les aimants à disposition (induction rémanente, champ coercitif pour les aimants de base, aimantation volumique pour les aimants qui formeront la toupie) par confrontation de mesures expérimentales effectuées à l'aide d'un gaussmètre avec des simulations éléments finis via Comsol[®]. Ces modèles paramétrisés peuvent ensuite être combinés et traités afin d'en déduire une configuration stable et réalisable pour le Levitron[®] ;
- les étudiants peuvent finalement passer à la réalisation pratique de leur Levitron[®], et se montrer critiques concernant leur approche théorique par comparaison avec les résultats expérimentaux.

3 ETUDE THEORIQUE

Le modèle théorique employé pour décrire le Levitron[®] est tiré de [2], et est présenté brièvement lors de cette section.

3.1 Equilibre statique

On peut montrer ([2]) que le champ magnétique H généré par la base peut s'exprimer de la manière suivante :

$$H_z = H_0 \left(1 + \alpha_1 z' + \alpha_2 (z'^2 - r'^2 / 2) + \dots \right), \quad (1a)$$

$$H_r = H_0 \left(-\alpha_1 r' / 2 - \alpha_2 z' r' + \dots \right), \quad (1b)$$

où H_0 représente le module du champ magnétique à la position d'équilibre, prise comme référence ($z=0$ et $r=0$), H_z et H_r ses composantes axiales et radiales respectivement, et z' et r' de petites variations autour de la position d'équilibre. Les coefficients α_i sont en outre définis de la manière suivante :

$$\alpha_i(z_0) = \frac{1}{i!} \left(\frac{1}{H_z} \frac{\partial^i H_z}{\partial z^i} \right)_{r'=0, z'=z_0} \quad (2)$$

Pour qu'il y ait équilibre statique, on comprend aisément que la force magnétique exercée par la base sur la toupie doit compenser la force de gravité. En assimilant la toupie à un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = m\vec{u}_z$, on peut écrire, M étant la masse de la toupie, V le volume de l'aimant de la toupie, g l'accélération pesanteur, \vec{H} le champ généré par la base et \vec{M} l'aimantation volumique :

$$\iiint_V (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B} dV = \mu_0 (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{H} = M g \vec{u}_z \quad (3)$$

En insérant (1a) dans (3), on obtient :

$$\mu_0 m \alpha_1 H_0 = M g, \quad (4)$$

De (4), on peut ainsi déduire que la condition $m\alpha_1 > 0$ est requise pour qu'il y ait équilibre.

3.2 Stabilité de l'équilibre

La condition d'équilibre statique ne suffit pas à en assurer la stabilité ; d'autres restrictions concernant \vec{m} doivent intervenir. On observe, en pratique ([2]), que pour qu'il y ait stabilité, la toupie, et donc le vecteur \vec{m} , doit rester parallèle au champ magnétique de la base :

$$\vec{m} = m \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} \quad (5)$$

La force magnétique \vec{F}_m exercée sur la toupie devient donc, en injectant (5) dans (3) et sachant que $\text{rot} \vec{H} = \vec{0}$ (théorème d'Ampère) :

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0 m \text{grad} H^2}{2 |\vec{H}|} \quad (6)$$

Pour dégager les conditions de stabilité, une analyse par perturbations doit être menée : la stabilité sera assurée lorsque des déplacements perturbateurs, axiaux ou radiaux, de la toupie autour de sa position d'équilibre sont compensés par une force de perturbation opposée. En injectant (1a) et (1b) dans (6), et sachant que ([2]) :

$$H = H_0 (1 + \alpha_1 z' + \dots), \quad (7)$$

on obtient pour les composantes du vecteur force de perturbation, $F'_{m,z}$ et $F'_{m,r}$ ([2]) :

$$F'_{m,z} \cong 2\mu_0 m H_0 \alpha_2 z', \quad (8a)$$

$$F'_{m,r} \cong \mu_0 m H_0 \left(\frac{1}{4} \alpha_1^2 - \alpha_2 \right) r' \quad (8b)$$

Notons que pour arriver à (8a), la condition d'équilibre (4) a été soustraite. Ces perturbations seront compensées pour de petites excursions z' et r' si :

$$m \alpha_2 < 0 \quad (9a)$$

$$m (\alpha_1^2 - 4\alpha_2) < 0 \quad (9b)$$

En ajoutant la condition déduite de (4), on trouve que l'équilibre stable n'est possible que si les 4 relations suivantes sont vérifiées simultanément, conduisant à la définition d'une zone particulière le long de l'axe z appelée **zone de stabilité** :

$$\begin{cases} m < 0, \\ \alpha_1 < 0, \\ \alpha_2 > 0, \\ \alpha_1^2 - 4\alpha_2 > 0 \end{cases} \quad (10)$$

4 SIMULATION

Dans cette partie, les aimants disponibles sont tout d'abord identifiés. Les données numériques collectées sont ensuite utilisées afin de déterminer les zones de stabilité, respectant (10), pour diverses configurations possibles de la base aimantée. Pour terminer, une estimation de la masse de la toupie est fournie, se basant sur les résultats obtenus ci-dessus.

4.1 Identification magnétique des composants

Les aimants permanents qui vont être utilisés pour la construction du Lévitron[®] sont des ferrites durs, récupérés de haut-parleurs usagés. Aucune information à leur sujet n'était disponible *a priori*, si bien qu'une phase d'identification préalable s'est avérée indispensable. A cet effet, des mesures d'induction magnétique rayonnée le long de l'axe z par les aimants ont été effectuées à l'aide d'un gaussmètre à effet Hall (cf. fig.2), et confrontées au champ calculé à partir d'un modèle en potentiel vecteur magnétique résolu par la méthode des éléments finis sous Comsol[®].

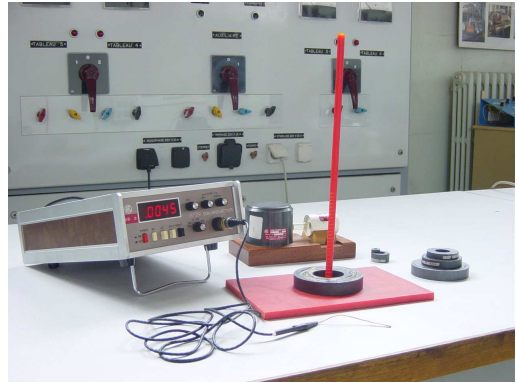


Fig. 2 : Station de mesure, gaussmètre modèle 912, RFL Industries Inc.

Pour les aimants susceptibles de former la base, la loi de comportement magnétique suivante a été retenue :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \quad (11)$$

Dans l'expression ci-dessus, μ_r représente la perméabilité magnétique relative de l'aimant, scalaire, μ_0 celle du vide, et \vec{B}_r l'induction rémanente de l'aimant, constante et orientée selon l'axe z .

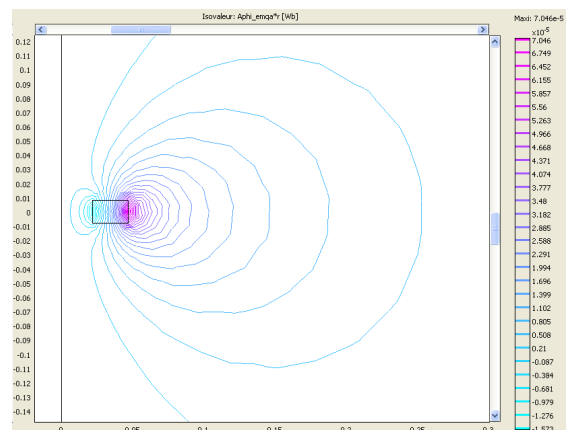


Fig. 3 : Lignes d'induction magnétique pour un aimant annulaire, à l'aide de Comsol[®].

En assimilant le deuxième quadrant du cycle d'hystérésis d'un aimant permanent à une droite de pente μ_r ([4]), les degrés de liberté du modèle *Comsol*[®] deviennent l'induction rémanente B_r et le champ coercitif H_c de l'aimant. En effet, on a (cf. fig.4) :

$$\mu_r = \frac{B_r}{\mu_0 H_c} \quad (12)$$

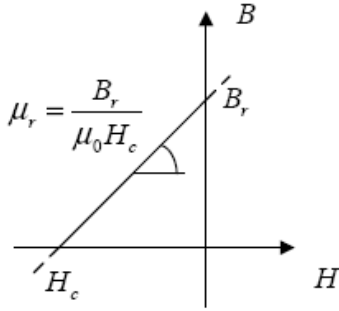


Fig. 4 : Deuxième quadrant du cycle d'hystérésis d'un aimant permanent, assimilé à une droite.

Ainsi, il suffit d'ajuster les paramètres B_r et H_c pour chaque modèle *Comsol*[®] de manière à ce que les courbes de champ magnétique le long de l'axe de l'aimant collent au mieux avec l'expérience. Ce caractère étant essentiellement subjectif, un indicateur *SNSE* (pour *Sum of Normalized Squared Errors*), renseignant sur la correspondance entre données simulées et mesurées, a été employé :

$$SNSE = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_{i,mes} - H_{i,sim}}{H_{i,mes}} \right)^2 \quad (13)$$

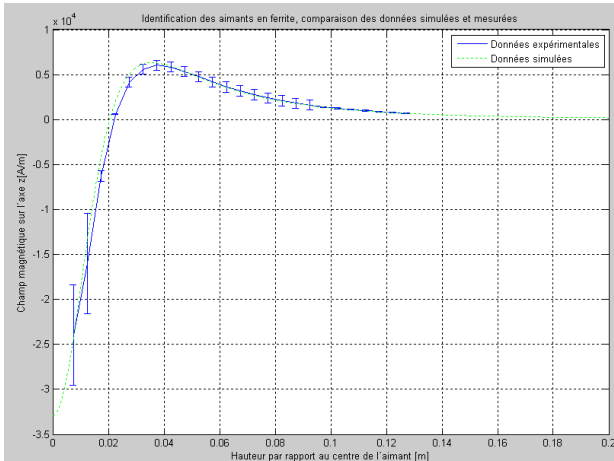


Fig. 5 : Identification d'un aimant en ferrite (B_2) : champ magnétique dans l'axe de l'aimant en fonction de la hauteur par rapport à l'aimant.

La figure 5 permet une comparaison entre champs mesuré expérimentalement et simulé. On remarque que la qualité de l'approximation est moindre au niveau des zones de grande pente du champ magnétique. Les mesures y sont en effet entachées d'une erreur plus grande.

Concernant les aimants susceptibles de former la toupie, la même démarche a été adoptée, si ce n'est l'emploi d'une loi de comportement magnétique de type :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (14)$$

\vec{M} étant l'aimantation volumique, supposée uniforme, à ne pas confondre avec la masse M de la toupie. On a donc :

$$\vec{m} = \iiint_V \vec{M} dV = \vec{M}V \rightarrow m = MV \quad (15)$$

La relation (15) nous permettra au point 4.3 d'estimer la masse de la toupie correspondant à une base donnée. Les résultats d'identification pour les aimants disponibles sont repris dans la table 1.

4.2 Détermination de la zone de stabilité pour une configuration des aimants de base

La section ci-dessus a permis l'identification et la modélisation de chaque aimant disponible. Il est donc maintenant possible de calculer les zones de stabilité, définies par (10), à partir des champs magnétiques simulés, via une communication entre les logiciels *Comsol*[®] et *Matlab*[®].

Combinaison	$z_{min}[m]$	$z_{max}[m]$	$\Delta z[m]$	$\alpha_1 H_0$
B_1	0.0574	0.062	0.0046	-105064
B_2	0.051	0.054	0.0039	-124022
B_3	0.036	0.0389	0.0029	-301528
B_4	0.0322	0.0348	0.0026	-159251
B_5	0.061	0.066	0.005	-112795
B_1+B_2	0.063	0.067	0.0045	-242443
B_2+B_5	0.0644	0.0685	0.0041	-255595
B_1+B_4	0.0465	0.0495	0.003	-297589

Table 2 : Zones de stabilité pour diverses combinaisons d'aimants pouvant former la base.

Les résultats peuvent être consultés en se référant à la table 2, où z_{min} et z_{max} correspondent respectivement aux limites inférieures et supérieures de la zone de stabilité, z étant repéré par rapport à la demi-hauteur de l'aimant le plus bas, et Δz à la largeur de cette dernière. Le produit $\alpha_1 H_0$ est défini au point 4.3 et est utilisé pour estimer la masse de la toupie correspondant à la base étudiée. La figure 6 montre l'évolution

Code aimant	B_i [T]	H_0 [A/m]	μ_r	M [A/m]	m [Am ²]	M [g]	SNSE
B_1	0.3075	160000	1.53				0.798
B_2	0.27	155000	1.39				5.352
B_3	0.395	201500	1.56				0.034
B_4	0.33	119000	2.2				0.412
B_5	0.315	169750	1.48				0.78
T_1				190000	0.8978	22.2	77.29
T_2				260000	1.3454	24.1	3.548
T_3				765000	1.3956	15.6	0.27

Table 1 : Identification des paramètres, définis en 4.1, des aimants disponibles par simulation. Les aimants B_i sont candidats à la formation d'une base, tandis que les T_i seront utilisés pour créer une toupie, de par leurs dimensions réduites. Remarquons que les mesures T_3 sont relatives à une toupie complète, fournie avec un Lévitron[®] vendu sur le marché et constituée d'un aimant en néodyme-fer-bore, ce qui explique la valeur élevée de M .

des expressions issues de (10) le long de l'axe de symétrie de la base, pour l'aimant B_5 .

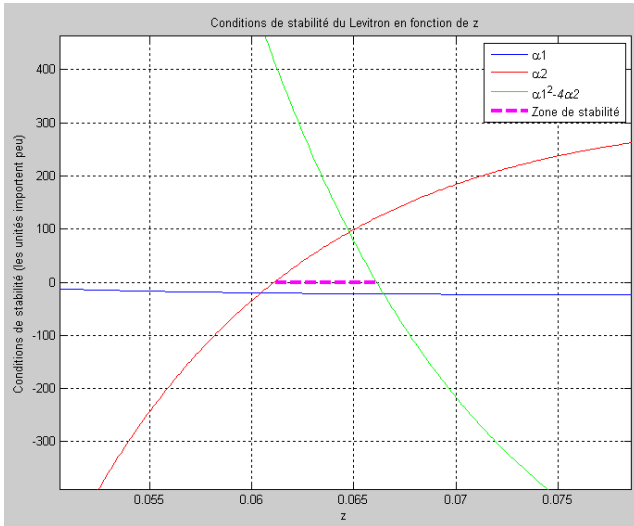


Fig. 6 : Détermination de la zone de stabilité pour l'aimant B_5 . La zone de stabilité apparaît en pointillés tandis que les conditions de stabilité issues de (10) sont représentées en traits continus.

4.3 Estimation de la masse de la toupie

Les bases candidates étant entièrement caractérisées, il convient maintenant d'estimer la masse de la toupie à venir placer en lévitation. Nous emploierons pour cela la relation d'équilibre statique (4), que nous rappelons ici :

$$\mu_0 m \alpha_1 H_0 = Mg, \quad (4)$$

Pour une configuration de base donnée, et donc à $\alpha_1 H_0$ donné (les valeurs de α_1 et H_0 étant prises au centre de la zone de stabilité), on peut en déduire la masse M de la toupie, connaissant son moment m par (15).

5 REALISATION DU LEVITRON[®]

Les données nécessaires à la réalisation pratique du Lévitron[®] sont maintenant réunies. Parmi les différentes possibilités offertes, notre choix s'est porté sur la combinaison B_5 pour la base et T_3 pour la toupie (cf. fig. 7), cette dernière provenant d'un Lévitron[®] acheté en commerce. L'emploi de (4) nous renseigne alors que la masse à atteindre, théoriquement, vaudrait 20,19g (valeur au centre de la zone de stabilité).

Au final, la toupie devra tout de même être lestée pour éviter qu'elle ne soit éjectée hors du système : on obtient une masse totale de 26,1g, supérieure de 22,6% aux prévisions. Cet écart, relativement important mais en adéquation avec la littérature ([6]), peut s'expliquer de la manière suivante. Notre méthode d'estimation de la masse souffre en effet d'imprécisions non négligeables. La force magnétique exercée par la base sur la toupie a été calculée en assimilant cette dernière à un dipôle magnétique ponctuel, et ne fait donc intervenir le champ magnétique qu'au centre de l'aimant. Rigoureusement, l'intégrale définie dans (3) devrait être calculée de manière exacte. Remarquons également que la taille relativement faible de la zone de stabilité ajoute encore de l'importance à l'ajustement précis, par expérience, du poids de la toupie. Il est de même intéressant de noter que l'influence de la température sur les propriétés magnétiques des aimants n'a pas été incluse dans ce modèle, en dépit de son impact certain, en particulier pour les ferrites.

Par contre, la hauteur de la zone de stabilité est en adéquation parfaite avec la valeur calculée. On relève ainsi une hauteur de 6,2 à 6,8cm, aux erreurs de mesures près, contre les quelques 6,1 à 6,6cm prévus.

Dans des conditions favorables (réglage de la base à l'aplomb, perturbations extérieures minimales, etc.), nous

avons pu observer le phénomène de lévitation pour une période allant jusqu'à 1min22s.



Fig. 7 : Lévitron réalisé en laboratoire, constitué de la combinaison d'aimants de base B_5 et de la toupie T_3 , comprenant un aimant en néodyme-fer-bore. Une masse de 26,1g a été nécessaire pour obtenir une lévitation stable pendant 1min22s.

6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté tout au long de cet article, un projet destiné à des étudiants de deuxième Bachelier Ingénieur, dont les objectifs étaient l'étude théorique, la simulation par éléments finis et la réalisation pratique en laboratoire d'un Lévitron[®] à partir de composants de récupération. Grâce au dispositif construit, nous avons montré que le modèle employé pour la détermination de la zone de stabilité de la base aimantée, tiré de [2], donnait d'excellents résultats. Cependant, notre méthode d'estimation de la masse de la toupie s'est avérée relativement imprécise, ce qui se comprend aisément au vu de l'approximation dipolaire simpliste qui a été retenue. Bien que des erreurs de mesure aient également entaché les résultats (mesure au gaussmètre, etc.), et qu'une étude rigoureuse du phénomène de propagation d'erreurs permettrait de mieux cerner cette différence, les auteurs restent convaincus qu'une intégration numérique sur l'ensemble de la toupie conduirait à de meilleurs résultats, et

comptent d'ores et déjà proposer un nouveau projet de deuxième Bachelier traitant de cette problématique.

7 RETOUR DES ETUDIANTS

Ce travail s'est principalement distingué auprès des étudiants par son caractère complet. En effet, il leur a permis d'allier à la fois approche théorique, logicielle et rigueur expérimentale. Le binôme d'étudiants ayant participé à ce projet s'est d'ailleurs vu décerner par la Faculté Polytechnique de Mons (FPMs) le prix *PolytechNews 2008*, prix destiné à encourager la promotion de projets d'étudiants de la FPMs, toutes années confondues, auprès du grand public (typiquement aux autres étudiants et aux élèves du secondaire).

8 REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier les étudiants ayant participé à ce projet, Marie Reumont et Denis Hérim, pour l'assiduité et la motivation dont ils ont fait preuve. Nous remercions également Emmanuel Bury, technicien attaché au service de Génie Électrique de la Faculté Polytechnique de Mons, pour ses conseils précieux et avisés sur le plan technique.

Bibliographie

- [1] Hones E.W., Hones W.G., *U.S. Patent no.5404062*, 4 April 1995.
- [2] Jones T.B., Washizu M., Gans R., "Simple Theory for the Levitron[®]", *J. Appl. Phys.*, vol. 82 no. 2, 15 July 1997, pp 883-888.
- [3] Durand E., "Magnétostatique", *Masson éd.*, 1968.
- [4] Brissonneau P., "Aimants permanents, principes et circuits magnétiques", *Techniques de l'Ingénieur, Traité de Génie Électrique*, D 2090, Septembre 1990.
- [5] De La Taille R., "La lévitation magnétique – le Lévitron[®]", *Science et Vie no.934*, Juillet 1995, pp.148.
- [6] Simon M.D., Helfinger L.O. and Ridgway S.L., "Spin Stabilized Magnetic Levitation", *Am. J. Phys.* 65(4), April 1997, pp.286-292.
- [7] Berry M.V., "The Levitron[®]: an Adiabatic Trap for Spins", *Proc. R. Soc. Lond. A* 452, 1996, pp.1207-1220.
- [8] Gans R.F., Jones T.B. and Washizu M., "Dynamics of the Levitron[®]", *J. Appl. Phys.* vol. 31, 1998, pp.671-679.