

# Etude du couple dans les machines synchrones. Où sont les champs tournants ?

Emmanuel HOANG, Gilles FELD  
Ecole Normale Supérieure de Cachan, département E.E.A.  
hoang@satie.ens-cachan.fr ; feld@eea.ens-cachan.fr

**Résumé :** Dans cet article, nous proposons d'étudier les machines synchrones au travers d'exercices. Dans une première partie, nous présentons une méthode de calcul du couple électromagnétique utilisée dans les laboratoires de recherche, à savoir : le tenseur de Maxwell. Pour le calcul du couple avec cette méthode, il est nécessaire de déterminer les composantes spatiales de la composante normale de l'induction ( $B_n$ ) et de la composante tangentielle du champ magnétique ( $H_t$ ) dans la zone d'entrefer. Pour ce faire, nous utilisons un logiciel libre de calcul par éléments finis : "femm". Après avoir présenté les outils, nous présentons la machine synchrone à aimants permanents déposés (collés) en surface du rotor. Les premiers exercices proposés permettent de quantifier le rôle de l'inducteur au travers de la composante normale de l'induction ( $B_n$ ) et ainsi le cas de la machine synchrone triphasée à excitation bobinée à pôles lisses est abordé. Les derniers exercices proposés vont permettre de "réaliser" des machines synchrones plus exotiques dites à pôles fractionnaires.

## 1 Introduction

Les machines tournantes électriques jouent un rôle important dans la production et dans la conversion de l'énergie électrique. Parmi ces dernières, les machines synchrones en sont un des piliers. De nombreuses générations d'étudiants les ont étudiées. L'étude de la machine synchrone alimentée par un réseau à fréquence et à tensions fixes et l'étude de la machine synchrone auto pilotée sont incontournables. Cependant, avec l'apparition (pas subite) de "nouveaux" besoins, tels que les générateurs "hautes" vitesses pour l'avionique, les machines "fort" couple et vitesse "lente" pour aérogénérateurs [7], les houlo-générateurs ou encore les moteurs électriques pour les véhicules hybrides sont apparues de nouvelles structures. Dans cet article nous présentons un outil d'analyse inspiré de [1], accessible au niveau bac+2, permettant, soit de comprendre le fonctionnement de ces structures, soit de justifier leurs structures.

Cet article est juste une contribution à l'ensemble complexe de la théorie des machines électriques. Nous n'avons pas la prétention, loin s'en faut, d'ajouter une énième couche théorique, mais bien au contraire, de proposer aux étudiants un outil (le calcul par éléments finis) leurs permettant de se poser des questions quant au fonctionnement des machines synchrones avec une approche par exercices. Bien sûr, des pré-requis sont nécessaires :

- Equations de Maxwell
- Opérateurs différentiels linéaires du premier ordre
- Tenseurs

Cet article n'a pas vocation à re-démontrer le principe physique des forces électromagnétiques, mais nous utiliserons le résultat simple de cette théorie (voir § 3.2).

## 2 Présentation de la machine

Dans les différents exercices, nous étudierons une machine synchrone triphasée.

- Pour simplifier l'étude, nous faisons l'hypothèse que le matériau magnétique est linéaire ( $\mu_r = 1000$ ). Il y a une encoche par pôle et par phase. Le coefficient de remplissage des encoches (coef. bobinage) est de 100 %.

- Afin de pouvoir refaire les calculs, nous proposons l'application numérique : diamètre du stator = 240 mm, diamètre d'entrefer = 170 mm, longueur de l'entrefer = 1 mm et longueur active = 30 mm. La section des dents est constante et les encoches sont ouvertes.
- L'épaisseur des aimants permanents est de 5 mm.
- Dans un premier temps, les machines sont triphasées et possèdent 4 paires de pôles ( $p = 4$ ). Le nombre d'encoches est de 24.

Une coupe de la machine est présentée à la figure 1.

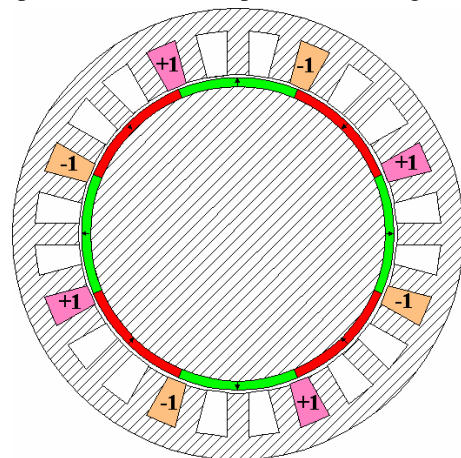


Fig. 1 : Disposition "classique" des bobinages de la phase 1 et disposition des aimants permanents

On définit :

- $p$  = nombre de paires de pôles
- $n_s$  = nombre de spires d'une phase du stator
- $n_e$  = nombre de spires d'un enroulement du rotor

On en déduit :

- $n_s/p$  conducteurs dans une encoche au stator
- $n_e/p$  conducteurs dans une encoche au rotor

On note :

- $R_e$  = rayon de la zone d'entrefer
- $L_a$  = longueur active du circuit magnétique
- $S_b$  = section d'une encoche au stator (il y en a  $6 \times p$ )
- $S_{be}$  = section d'une encoche au rotor (il y en a  $2 \times p$ )

En annexe, nous proposons un exemple de tôle statorique à 48 encoches, afin d'enrichir vos exemples de machines.

L'épaisseur de la culasse statorique doit être déterminée en fonction de la contrainte de saturation des tôles ferromagnétiques. Cet élément n'est pas pris en compte dans l'étude présentée dans cet article.

### 3 Méthode de calcul

#### 3.1 Présentation

Nous allons présenter une méthode pour exprimer le couple électromagnétique basée sur l'utilisation du tenseur de Maxwell. Afin de valider cette méthode, nous rappelons l'expression du couple établie à partir d'un bilan des puissances électromécaniques :

$$C = \frac{3}{2} p (n_s \phi_M) I_M = \frac{3}{2} p \phi_M (n_s I_M) \quad (1)$$

Avec  $\phi_M$  = flux maximum moyen par spire

$$\phi_M = \hat{B}_e S_{fer} \text{ avec } S_{fer} = \frac{2 R_e L_a}{p}$$

$$I_M = \sqrt{2} \delta_{eff} \frac{S_b}{n_s / p} \text{ avec } \delta_{eff} : \text{densité de courant}$$

$$D'où C = \frac{3}{2} \sqrt{2} p 2 R_e L_a \hat{B}_e \delta_{eff} S_b \quad (2)$$

#### 3.2 Tenseur de Maxwell

Au point M situé dans l'entrefer, deux grandeurs magnétiques sont présentes :

- Créé par l'excitation (située au rotor)

$$\boxed{B_{exc}(M) = \hat{B}_{exc} \cos(\theta_r)}$$

$\theta_r$  : angle référencé par rapport à l'axe du rotor

- Créé par les courants d'induit (situé au stator)

Avec des courants qui dépendent de  $\theta'$  (voir ex. n°6) :

$$\boxed{H_{t\_ind}(M) = \hat{H}_{t\_ind} \sin(\theta_s - \theta')}$$

$\theta_s$  : angle référencé par rapport à l'axe du stator

Remarque : les angles sont des angles électriques.

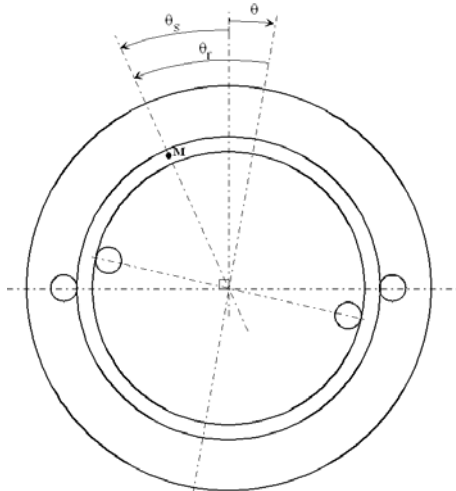


Fig. 2 : Définition des angles

Sur un élément de surface, situé dans l'entrefer, la force tangentielle peut s'exprimer, à l'aide du tenseur de Maxwell, par :

$$dF_t = B_n H_t dS \quad (3)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} B_n = B_{exc}(M) = \hat{B}_{exc} \cos(\theta_r) \\ H_t = H_{t\_ind}(M) = \hat{H}_{t\_ind} \sin(\theta_s - \theta') \end{cases}$$

$$dS = R_e L_a d\theta_s \text{ et } \theta = \theta_s - \theta_r$$

$$C = R_e^2 L_a \int_0^{2\pi} [\hat{B}_{exc} \cos(\theta_s - \theta) \times \hat{H}_{t\_ind} \sin(\theta_s - \theta')] d\theta_s$$

$$C = \pi R_e^2 L_a \hat{B}_{exc} \hat{H}_{t\_ind} \sin(\theta - \theta') \quad (4)$$

Avec  $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$  (Principe de l'autopilotage)

$$\boxed{C = \pi R_e^2 L_a \hat{B}_{exc} \hat{H}_{t\_ind}} \quad (5)$$

$$\text{Avec : } \hat{H}_{t\_ind} = \frac{3 n_s I_M}{\pi (R_e / p)} \quad (6)$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{2} \sqrt{2} p 2 R_e L_a \hat{B}_{exc} \delta_{eff} S_b \quad (7)$$

On retrouve la formule (2) établie à partir d'un bilan des puissances.

#### 3.3 Discussion

Dans ce qui vient d'être présenté, l'effet des encoches n'est pas pris en compte. La saillance due à ces dernières est inéluctable, bien que l'on essaye de les fermer. La conséquence de l'existence des encoches est que l'excitation ne crée pas uniquement  $B_n$ , mais aussi du  $H_t$ , il en résulte la création d'un couple dit couple de détente. Il en va de même lorsque qu'il existe un rotor saillant, les courants d'induit ne pas uniquement créateur de  $H_t$ , mais aussi de  $B_n$ , il en résulte la création d'un couple dit couple de saillance.

La méthode issue du tenseur de Maxwell nécessite l'utilisation d'un logiciel de calcul par éléments finis, mais elle permet de s'affranchir de la définition du volume d'entrefer, car il faut "seulement" intégrer le produit de  $B_n$  et de  $H_t$  le long d'un parcours dans la zone d'entrefer. Cela va être utile pour les machines à encoches ouvertes jusqu'à celles dites à bobinages concentriques ("grosses" dents).

L'utilisation d'un logiciel par éléments finis permet, aussi, de s'affranchir du flux de fuite (détermination des inductances de fuites) car il est possible de calculer directement les composantes  $B_n$  et  $H_t$  dans l'entrefer, en imposant des densités de courant dans les bobinages.

Pour finir, cette méthode permet de faire une analyse spectrale des composantes de  $B_n$  et de  $H_t$  dans la participation à la création du couple.

Nous proposons d'utiliser le logiciel (libre) de calcul par éléments finis (2D) nommé "femm" [5] et [6].

### 4 Exercice n°1

Dans cette machine (voir fig. 1), les bobinages d'induit sont situés au stator et sont alimentés avec des courants sinusoïdaux. Ces courants sont générateurs de la composante  $H_t$ . En surface du rotor sont disposés des aimants permanents (AP). Ils sont générateurs de la composante  $B_n$  (voir fig. 3). Dans le cas de notre étude, l'induction rémanente des aimants est de 1 T et la perméabilité relative de ces derniers a une valeur de 1.

- Ex. n°1 – Q1. Détermination de la composante normale de l'induction ( $B_n$ ) pour deux positions du

rotor en fonction de la position angulaire d'un point M situé dans la zone d'entrefer, noté  $\theta_s$ .

- **Ex. n°1 – Q2.** Détermination de l'expression de la composante fondamentale de  $B_n$ , en fonction de la position du rotor notée  $\theta$ .

### Eléments de réponse

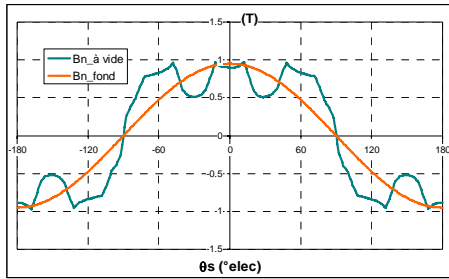


Fig. 3 : Composantes  $B_n$  pour un point dans l'entrefer

## 5 Exercice n°2

On peut remarquer que l'ouverture des encoches se traduit par des "trous" dans la courbe représentative de la composante  $B_n$ . Une fermeture de ces encoches permet d'atténuer leurs influences et ainsi d'augmenter l'amplitude de la composante  $B_n$ . Sur la figure 5, est représentée la composante  $B_n$  dans le cas où les encoches sont totalement fermées (cas théorique extrême). La machine pour cet exercice est présentée à la figure 4.

- **Ex. n°2 – Q1.** Détermination de la composante normale de l'induction ( $B_n$ ) pour deux positions du rotor en fonction de la position angulaire d'un point M situé dans la zone d'entrefer, noté  $\theta_s$ .
- **Ex. n°2 – Q2.** Détermination de l'expression de la composante fondamentale de  $B_n$ , en fonction de la position du rotor notée  $\theta$ .

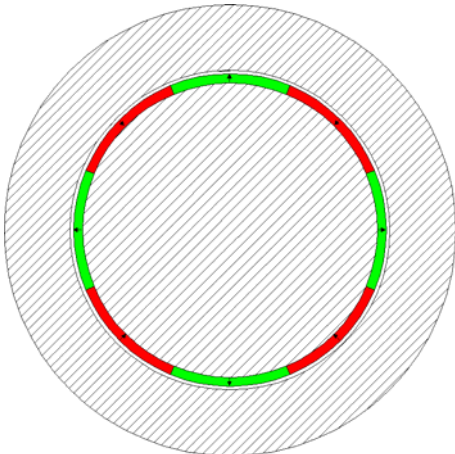


Fig. 4 : Stator "plein" pour le cas encoches fermées

### Eléments de réponse

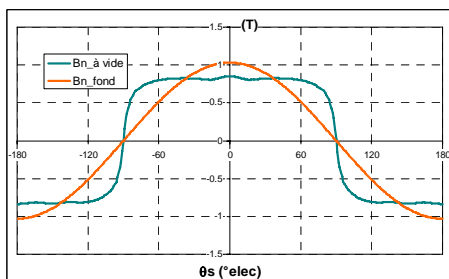


Fig. 5 : Composantes  $B_n$  pour un point dans l'entrefer dans le cas d'encoches totalement fermées.

## 6 Exercice n°3

Pour cet exercice, on remplace les aimants permanents par un rotor saillant comportant une excitation bobinée.

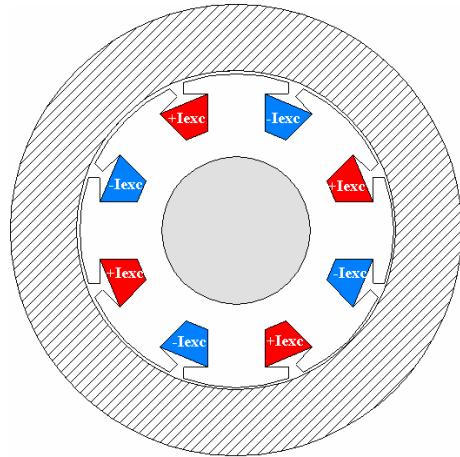


Fig. 6 : Stator "plein et excitation bobinée.

Pour les calculs numériques, les densités de courants sont de  $10 \text{ A/mm}^2$ , pour l'excitation. La section d'une encoche est de :  $S_{be} = 185 \text{ mm}^2$

$$D'où \quad \frac{n_e}{p} I_{exc} = \delta_e S_{be} = 1850 \text{ A}$$

- **Ex. n°3 – Q1.** Détermination de la composante normale de l'induction ( $B_n$ ) pour deux positions du rotor en fonction de la position angulaire d'un point M situé dans la zone d'entrefer, noté  $\theta_s$ .
- **Ex. n°3 – Q2.** Détermination de l'expression de la composante fondamentale de  $B_n$ , en fonction de la position du rotor notée  $\theta$ .

## 7 Exercice n°4

Pour cet exercice, on revient à la machine triphasée initiale présentée à la partie 2 ('Présentation de la machine'). L'ensemble des enroulements d'alimentation et les aimants permanents sont présentés à la figure suivante.

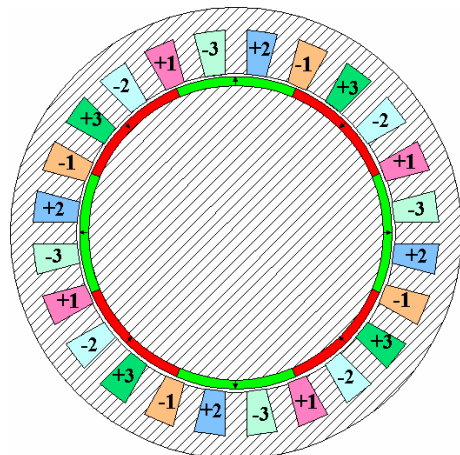


Fig. 7 : Disposition "classique" des bobinages des trois phases

Dans cet exercice, il est demandé de calculer avec le logiciel de calcul par éléments finis les flux, dans les bobinages de l'induit, dus uniquement aux aimants. Cela va permettre de déterminer les courants d'alimentation pour créer un couple moyen non nul. La base théorique

de cet exercice a été étudiée dans le cours sur les machines électriques.

- **Ex. n°4 – Q1.** Détermination du flux dans la phase 1 en fonction de la position du rotor sur une période électrique.
- **Ex. n°4 – Q2.** Idem phase 2 et phase 3.
- **Ex. n°4 – Q3.** Détermination des expressions des flux dans les trois phases en fonction de la position du rotor, notée  $\theta$ .

## 8 Exercice n°5

Pour la machine de l'exercice n°4, l'origine du positionnement angulaire du rotor est définie quand le rotor est positionné dans l'axe de la phase 1 du stator. Dans ce cas, nous avons  $\theta = 0$ , et les phases des courants sont ajustées de manière à avoir le couple moyen maximum. Les courants d'induit s'écrivent :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ i_2 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Pour les calculs numériques, Les densités de courants sont de  $10 \text{ A/mm}^2$  (efficace) pour l'induit.

La section d'une encoche est de  $S_b = 175 \text{ mm}^2$

D'où  $\frac{n_s}{p} I_M = \delta_{\text{eff}} S_b = 1750 \text{ A}$

- **Ex. n°5 – Q1.** Détermination du couple instantané.

### Eléments de réponse

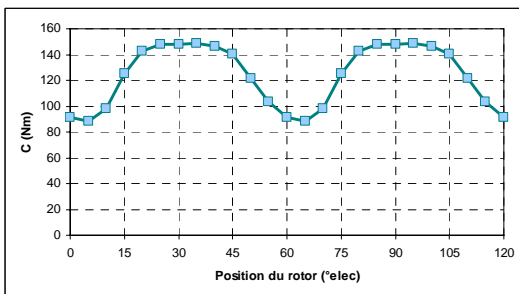


Fig. 8 : Couple instantané

$\Rightarrow C_{\text{moy}} = 125 \text{ Nm}$

On peut remarquer, sur la figure 8, que le couple instantané n'est pas constant. A l'aide des résultats de l'exercice n°4, il est possible de calculer le couple instantané avec la formulation explicitée dans le cours sur les machines électriques :

$$C = p \sum_{k=1}^3 i_k(\theta) \frac{d\psi_k(\theta)}{d\theta}$$

Et ainsi de quantifier l'effet des composantes harmoniques du flux, que l'on retrouve dans  $B_n(\theta_s)$  (voir fig.3).

Pour finir, il est intéressant de calculer le couple de détente dû aux aimants seuls.

## 9 Exercice n°6

Dans cet exercice, on étudie uniquement l'effet des courants d'induit, pour cela, les aimants sont remplacés par

de l'air, car on souhaite annuler leurs influences et la valeur de leurs perméabilités magnétiques est équivalente à celle de l'air.

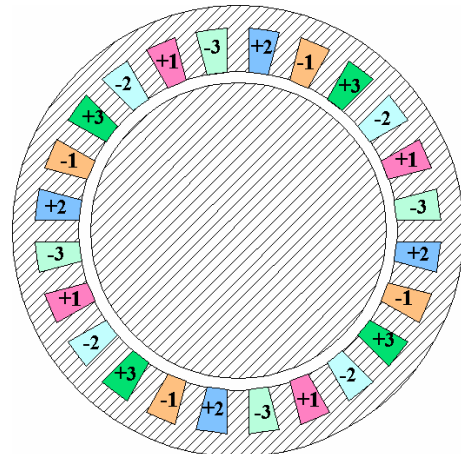


Fig. 9 : Disposition "classique" des bobinages des trois phases et aimants permanents enlevés.

Avec les mêmes courants triphasés qu'à l'exercice n°5 :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ i_2 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I_M \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

- **Ex. n°6 – Q1.** Détermination de  $H_t(\theta_s)$ .
- **Ex. n°6 – Q2.** Détermination de sa composante fondamentale, en fonction de la position du rotor ( $\theta$ ).

### Eléments de réponse

Sur la figure 10 est représentée la composante  $H_t$  en fonction de la position angulaire d'un point dans la zone d'entrefer, notée  $\theta_s$ .

Sont représentés trois cas de figures :

- $H_t$  (à vide) due aux courants d'induit
- $H_{t\_fond}$  : composante fondamentale de  $H_{t\_àvide}$
- $H_t$  (en charge) due aux courants d'induit et à l'excitation (AP).

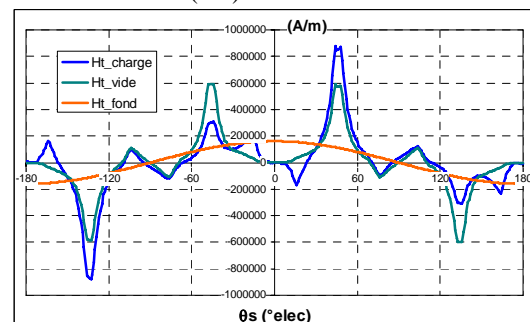


Fig. 10 : Composantes  $H_t$  pour un point dans l'entrefer

## 10 Exercice n°7

Dans cet exercice, on étudie uniquement l'effet du courant d'induit de la phase 1. Les aimants sont remplacés par de l'air (voir exercice n°6).

Avec  $i_1 = I$ ,  $i_2 = 0$  et  $i_3 = 0$  :

- **Ex. n°7 – Q1.** Détermination de  $H_t(\theta_s)$ .
- **Ex. n°7 – Q2.** Détermination du spectre angulaire.
- **Ex. n°7 – Q3.** Choix du nombre de paires de pôles.

### Eléments de réponse

Nous obtenons la répartition spatiale de  $H_t$  donnée à la figure 11. A partir du spectre de  $H_t$  (voir fig. 12), nous en déduisons des machines possibles :

- avec 8 AP, machine à 4 paires de pôles
- avec 40 AP, machine 20 paires de pôles
- etc...

Pour "trouver" les machines possibles, la périodicité des aimants doit être la même que celle de  $H_t$ .

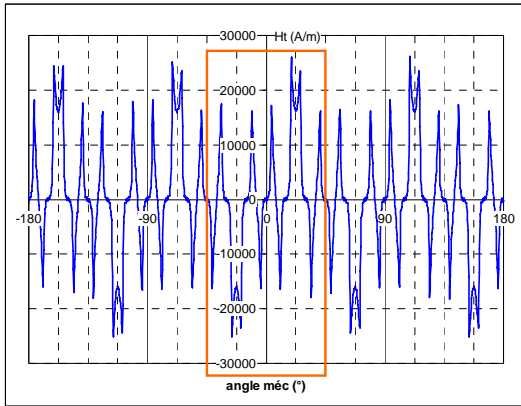


Fig. 11 : Composantes  $H_t$  pour un point dans l'entrefer

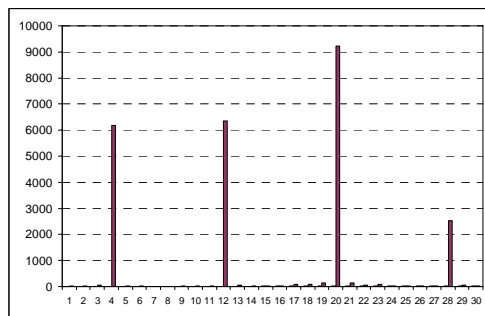


Fig. 12 : Spectre harmonique de  $H_t$  pour un point dans l'entrefer

### 11 Exercice n°8

En modifiant la disposition "classique" des bobinages de la phase 1, comme indiqué sur la figure 13, nous obtenons la répartition spatiale de  $H_t$  donnée à la figure 14.

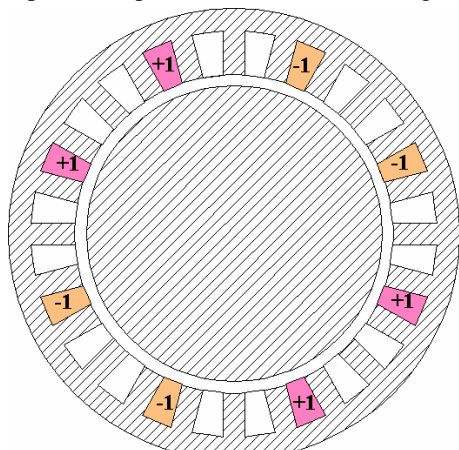


Fig. 13 : Disposition "alternée" des bobinages de la phase 1

Avec  $i_1 = I$ ,  $i_2 = 0$  et  $i_3 = 0$  :

- Ex. n°8 – Q1. Détermination de  $H_t(\theta_s)$ .
- Ex. n°8 – Q2. Détermination du spectre angulaire.
- Ex. n°8 – Q3. Choix du nombre de paires de pôles.

### Eléments de réponse

A partir du spectre de  $H_t$  (voir fig. 16), nous en déduisons des machines possibles :

- avec 4 AP, machine à 2 paires de pôles
- avec 20 AP, machine 10 paires de pôles
- etc...

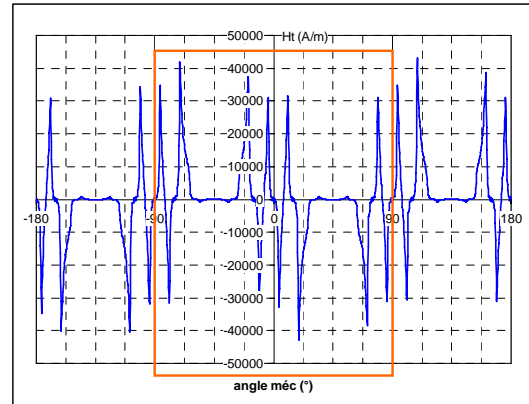


Fig. 14 : Composantes  $H_t$  pour un point dans l'entrefer

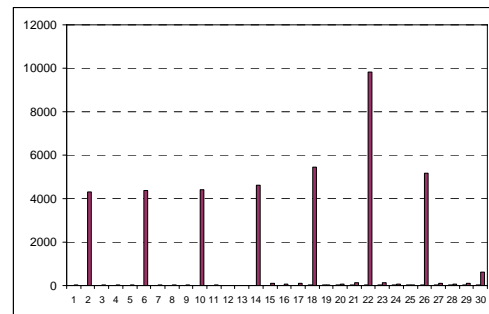


Fig. 15 : Spectre harmonique de  $H_t$  pour un point dans l'entrefer

### 12 Exercice n°9

- Ex. n°9 – Q1. Calcul du couple instantané pour deux machines de l'exercice n°7 et pour deux machines de l'exercice n°8, avec le logiciel "femm".
- Ex. n°9 – Q2. Calcul du couple instantané pour deux machines de l'exercice n°7 et pour deux machines de l'exercice n°8, avec la détermination de  $B_n(\theta_s)$ , avec uniquement les aimants permanents et avec la détermination de  $H_t(\theta_s)$ , avec uniquement les courants définis à la formule (7).

### Eléments de réponse

Le couple, pour la machine de l'exercice n°7 avec  $p = 20$ , calculé directement avec le logiciel "femm" est donné à la figure suivante.

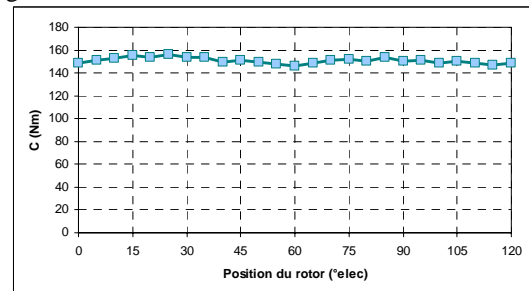


Fig. 16 : Couple pour la machine de l'exercice n°7 avec  $p = 20$

$$\Rightarrow C_{\text{moy}} = 151 \text{ Nm}$$



### 13 Conclusion

Les machines électriques sont constituées de tôles ferromagnétiques, de conducteurs en cuivre (ou aluminium) et parfois d'aimants permanents. Cette simplicité dans la constitution s'accompagne de lois de fonctionnement complexe, car les théories qui les sous tendent le sont.

Dans cet article, nous n'avons pas voulu faire un raccourci et mettre de côté l'Histoire de l'électromagnétisme, mais nous voulons proposer aux étudiants et aux enseignants un outil "moderne" - ordinateur et logiciel de calcul par éléments finis - pour d'appréhender de manière complémentaire l'étude des machines électriques et en particulier l'étude des machines synchrones. Sur l'utilisation de l'ordinateur comme outil pédagogique, un exemple d'élément de réflexion peut être lu dans [8].

Nous avons proposé une série d'exercices avec une démarche progressive, mais il est tout à fait possible d'entrer dans l'étude par l'exercice de son choix. Les exercices proposés sont des exemples et les éléments de réponse ne sont là que pour vous aider à construire votre approche. L'imagination et la réflexion de chacun sont là pour les enrichir.

La méthode d'analyse proposée permet de compléter l'enseignement des machines synchrones classiques mais aussi d'appréhender l'étude des machines dites à pôles fractionnaires. A ce titre, nous avons mis en annexe des dimensions d'une tôle statorique à 48 encoches, à priori pour "faire" une machine triphasée à 8 paires de pôles, mais nous avons vu qu'il existe d'autres possibilités ...

### 14 Bibliographie

- [1] B. Nogarede D. Harihbey, Y. Lefevre, F. Pigache *Platine d'expérimentation MicroMAG : à la découverte de la machine synchrone autopilotée* Congrès CETSIS 2007
- [2] M. Jufer *Electromécanique* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes 1995
- [3] G. Meunier, J. L. Coulomb *Modèles et formulations en électromagnétisme - Introduction aux éléments finis nodaux* Hermès 2002
- [4] B. Multon *Conception d'actionneurs spéciaux* cours ENS Cachan - antenne de Bretagne 2006
- [5] S. Canat, J. Faucher *Calcul de champ magnétique : logiciel FEMM et méthode analytique* Revue 3EI n° 35, pp 16-22
- [6] <http://femm.foster-miller.net>
- [7] M. Machmoum, L. Moreau, M. Zaïm, G. Barakat, N. Takorabet, Ch. Chillet, D. Matt , S. Taïbi, A. Tounzi, Ch. Espanet, A. Miraoui, H. S. Zire *Comparaison de structures électromagnétiques pour une application en générateur à faible vitesse et fort couple* EF'2003 Électrotechnique du futur 9-10 déc. 03
- [8] Le Monde de l'éducation, n° 368, avril 2008 *Dossier : l'élève numérique, pp 26-36.*

### 15 Annexe

