

Un dispositif expérimental pour l'identification dans l'espace des fréquences

Laetitia Perez¹, Laurent Autrique¹
laurent.autrique@univ-angers.fr
Polytech' Angers, 62 avenue notre dame du lac, 49000 Angers

RESUME : Les méthodes dynamiques de mesure des propriétés thermiques des matériaux sont basées sur l'observation du comportement d'échantillons soumis à une excitation dont les caractéristiques sont connues. Ces méthodes dynamiques sont habituellement classées en fonction du type d'excitation thermique, les plus utilisées étant l'échelon, le pulse de Dirac, la modulation sinusoïdale et plus récemment les séquences pseudo-aléatoires. Chacune de ces familles de méthodes comportent avantages et inconvénients qui font que l'une ou l'autre peut être plus pertinente dans une configuration donnée. Afin d'initier les étudiants à l'identification par méthode périodique, une maquette expérimentale dédiée aux travaux pratiques a été développée. L'objectif est, à partir d'un dispositif économique, d'illustrer les potentialités de cette approche. Nécessitant quelques connaissances en thermique, la maquette exposée peut être utilisée en premier ou second cycle universitaire.

Mots clés : dispositif pédagogique, analyse fréquentielle, travaux pratiques

1 CONTEXTE

L'introduction des méthodes périodiques pour la détermination des paramètres thermiques de solides homogènes remonte aux études d'Angström en 1863. Pour ces travaux précurseurs, l'échantillon se présente sous la forme d'un barreau (longueur \gg diamètre) dont une extrémité est soumise à une modulation sinusoïdale de température. Les paramètres thermiques sont déduits de l'évolution de l'atténuation et du déphasage des oscillations de température le long du barreau. Près d'un siècle plus tard, Cowan en 1961 a étendu ce type de méthode au cas de l'échantillon en forme de disque (diamètre \gg épaisseur). Depuis, le principe a été appliqué à la caractérisation de matériaux stratifiés (revêtements, collages), orthotropes (composites chargés en fibres longues, tissés), ceci de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique [1].

2 NOTATIONS

2.1 Notion de température complexe

Dans le cas d'un milieu soumis à une excitation sinusoïdale et ayant atteint un régime établi, si les équations du transfert thermique sont linéaires (paramètres indépendants de la température θ), la température en tout point x à l'instant t est la somme d'une composante continue et d'une composante sinusoïdale de même période que l'excitation : $\theta(x,t) = \theta_c(x) + \theta_s(x,t)$ avec :

$$\theta_s(x,t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$$

où $A(x)$ désigne l'amplitude des oscillations de température et $\varphi(x)$ le déphasage par rapport à l'excitation.

La composante sinusoïdale peut s'écrire comme étant la partie réelle du nombre complexe :

$$\hat{\theta}_s(x,t) = A(x) \exp(j\varphi(x)) \exp(j\omega t) = \tilde{\theta}(x) \exp(j\omega t)$$

On appelle température complexe la grandeur $\tilde{\theta}(x) = A(x) \exp(j\varphi(x))$ qui contient l'information sur l'amplitude et le déphasage des oscillations de température. Elle satisfait des mêmes équations que $\theta(x,t)$ adaptées au régime sinusoïdal établi. Ainsi, dans la configuration la plus simple,

- l'équation de la chaleur dans le massif

$$\Delta \theta(x,t) = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \text{ devient } \Delta \tilde{\theta}(x) = j \frac{\omega}{a} \tilde{\theta}(x)$$

où a est la diffusivité thermique,

- l'équation décrivant les transferts thermiques sur la

$$\text{surface du matériau } k \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial \vec{n}} = \Phi(x,t) \cos(\omega t)$$

$$\text{devient } k \frac{\partial \tilde{\theta}(x)}{\partial \vec{n}} = \tilde{\Phi}(x) \text{ où } k \text{ est la conductivité}$$

thermique et $\Phi(x,t)$ l'intensité flux incident.

On est ainsi ramené à la résolution d'un problème stationnaire. On trouvera quelques exemples illustrant la méthode des températures complexes dans [2]. Dans ce qui suit un exemple simple, introductif aux méthodes périodiques pour l'identification de propriétés thermique est proposé.

2.2 Etude d'un mince échantillon métallique en feuille mince

On considère un matériau plan, semi infini dont l'épaisseur $z = e$ est extrêmement faible. On définit la

longueur de diffusion par $\mu = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \sqrt{\frac{a}{\pi f}}$ où f est

la fréquence d'excitation. On considère que lorsque l'épaisseur de l'échantillon e est très faible devant la longueur de diffusion ($e \ll \mu$) les gradients de température peuvent être négligés dans l'épaisseur.

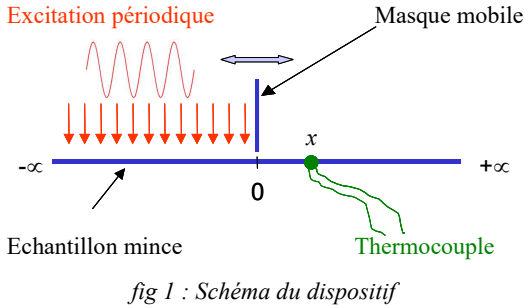
	a [$m^2 \cdot s^{-1}$]	μ [m]
argent	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$
cuiivre	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
aluminium	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$
acier	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$

Tableau 1 : Exemple de longueur de diffusion à $f = 0.1\text{Hz}$

L'excitation périodique générée, constante $\forall y$, est :

$$Q(x, y, t) = \begin{cases} Q(y, t) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et un masque mobile permet de contrôler la position du point d'origine $O(x=0)$ et donc de l'observation ; voir figure 1.



Les transferts de chaleur sont monodimensionnels selon l'axe (Ox) . En supposant que la température initiale est celle du milieu ambiant $\theta_0 = \theta_{ext}$, on peut écrire que l'élévation de température satisfait l'équation

$$\rho C e \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + h \theta(x, t) - k e \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = Q(x, t) \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique, C la chaleur spécifique, h le coefficient d'échange convectif. On considère dans l'espace des complexes la formulation générale suivante

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q e^{j\omega t} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ la température}$$

complexe résultante de cette excitation étant : $\theta(x, t) = \theta(x, \varphi) e^{j\omega t}$ où φ est le déphasage par rapport à l'excitation. L'équation précédente devient :

$$j\omega \rho C e \theta(x, \varphi) + h \theta(x, \varphi) - k e \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2} = \begin{cases} Q & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On montre aisément que la solution de cette équation est :

$$\theta(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{Q}{c_1} - \frac{Q}{2c_1} \exp\left(+\sqrt{\frac{c_1}{k e}} x\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{Q}{2c_1} \exp\left(-\sqrt{\frac{c_1}{k e}} x\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

avec $c_1 = j\omega \rho C e + h$. Une constante de temps caractéristique du système est : $\tau = \frac{\rho C e}{h}$, et pour $\omega \tau \gg 1$,

l'expression précédente peut être simplifiée. Ainsi, pour $x \geq 0$, le module et l'argument sont :

$$|\theta(x, \varphi)| \approx \frac{Q}{2\omega \rho C e} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \text{ et } \varphi \approx -\frac{x}{\mu} - \frac{\pi}{2}.$$

3 ANALYSE DU SYSTEME

3.1 Analyse par balayage spatial

Le balayage spatial consiste à effectuer les mesures de températures pour plusieurs positions du masque, c'est à dire en changeant la position de l'origine et donc la distance x . Pour ces mesures, l'excitation périodique est maintenue à une fréquence fixe. Ainsi en considérant que :

$$\log |\theta(x, \varphi)| \approx \log\left(\frac{Q}{2\omega \rho C e}\right) - \frac{x}{\mu},$$

le tracé du logarithme du module en fonction de la position du masque x , est une droite dont le coefficient directeur est $-1/\mu$. Cette donnée conduit à la détermination de la diffusivité de l'échantillon métallique. De même, en traçant le déphasage du signal mesuré sous le masque en fonction de la position x , on obtient encore une droite de coefficient directeur $-1/\mu$.

3.2 Analyse par balayage fréquentiel

Le balayage fréquentiel consiste à effectuer les mesures de températures pour plusieurs fréquences d'excitation tout en conservant le masque immobile, $x = \text{constante}$. En considérant que :

$$\log |\theta(x, \varphi)| \approx \log\left(\frac{Q}{4\pi \rho C e}\right) - \log f - x \sqrt{\frac{\pi f}{a}},$$

le tracé du logarithme du module en fonction de \sqrt{f} , est une droite dont le coefficient directeur est $-x \sqrt{\pi/a}$. Cette donnée conduit à la détermination de la diffusivité de l'échantillon métallique. De même, en traçant le déphasage du signal mesuré sous le masque en fonction de \sqrt{f} , on obtient encore une droite de coefficient directeur $-x \sqrt{\pi/a}$.

4 EXPERIMENTATION

L'excitation chauffante périodique est assurée à l'aide d'une ampoule halogène de format standard. Son alimentation est pilotée par un ordinateur équipé d'une carte permettant la commande et l'acquisition. Le thermocouple soudé à un échantillon métallique mince est relié à un amplificateur permettant d'obtenir les tensions donc les températures. En déplaçant le masque mobile à partir d'une position initiale et ce d'un pas constant, on obtient en mesurant le déphasage, le coefficient directeur de la droite. Il est important de noter que la position initiale du masque influe sur l'ordonnée à l'origine et non sur la pente. L'objectif étant de réaliser une expérimentation robuste et économique pour structure pédagogique est atteint.

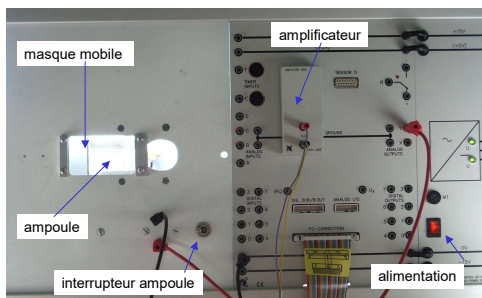


fig 2 : photographie du dispositif

Des mesures de déphasages ont été réalisées sur un clinquant d'acier et sont présentées ci-après. En partant d'une distance éloignée du masque (en ayant suffisamment de signal), des mesures de températures sont effectuées en régime établi après avoir déplacé le masque mobile par pas de $1mm$. La fréquence d'excitation est fixée à $f = 0.05Hz$. Les observations présentées ci-dessous ont été préalablement traitées avant d'être comparées au signal de référence; l'amplitude du signal en particulier a été modifiée.

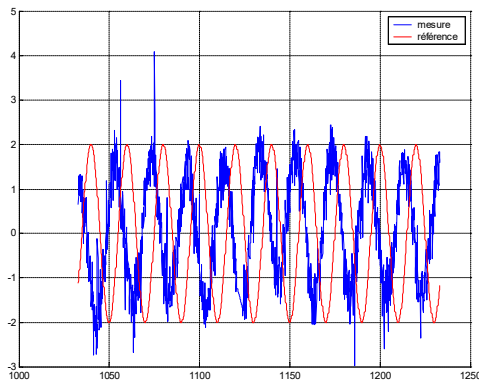


fig 3 : mesure à $x = \delta$ du masque

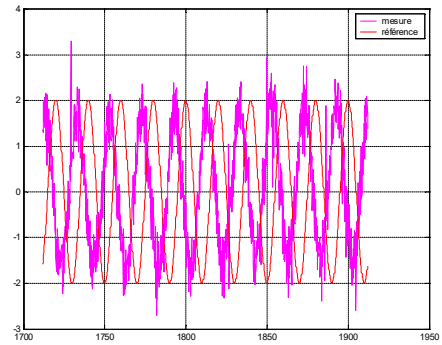


fig 4 : mesure à $x = \delta - 1mm$ du masque

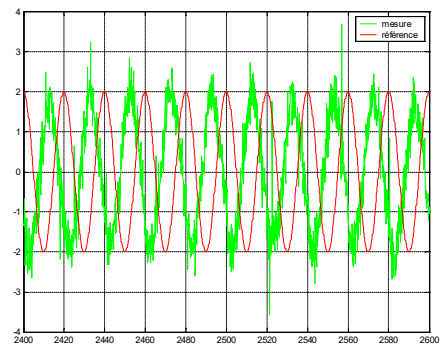


fig 5 : mesure à $x = \delta - 2mm$ du masque

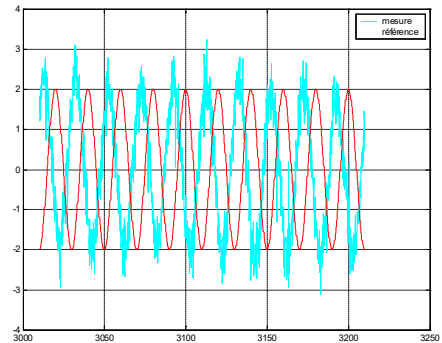


fig 6 : mesure à $x = \delta - 3mm$ du masque

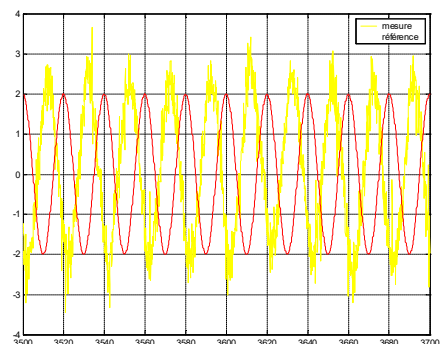


fig 7 : mesure à $x = \delta - 4mm$ du masque

Un algorithme de détection synchrone permet d'extraire les informations sur le déphasage des oscillations de température. D'une manière générale, les méthodes périodiques présentent des avantages lorsque le rapport signal/bruit sur l'observable est bas. Ceci est lié au traitement du signal issu du capteur qui permet d'en extraire l'amplitude et la phase même lorsque le niveau de bruit est élevé. La technique mise en œuvre est la détection synchrone [3], qui pourra être réalisée par un matériel ou un logiciel. Un amplificateur à détection synchrone (ADS) est un appareil capable à partir d'un signal d'entrée électrique quelconque et d'une référence périodique, de sélectionner la composante sinusoïdale de même période que la référence contenue dans le signal d'entrée et de calculer le module A_r et la phase φ_r de cette composante. Dans la figure ci-dessous, les déphasages obtenus pour le balayage spatial des 5 positions précédentes sont présentés :

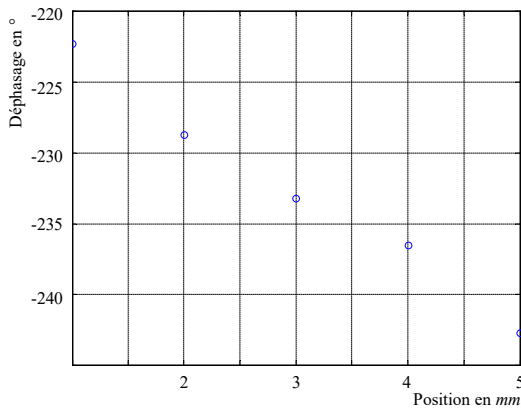


fig 8 : Déphasages mesurés en balayage spatial

La pente est $-\frac{1}{\mu} \approx -5000$ d'où $\mu \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ et $a = \pi f \mu^2 \approx 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Cet ordre de grandeur est tout à fait représentatif d'un acier.

5 ANALYSE DE SENSIBILITE

L'expérimentation proprement dite peut être complétée en travaux dirigés par un exposé succinct des principes de base de l'analyse de sensibilité et de sa mise en œuvre dans le cadre de l'identification de la diffusivité thermique. L'analyse de sensibilité est réalisée afin d'estimer l'effet de la variation d'un des paramètres d'entrées (p_i) sur la sortie (s_i) d'un modèle mathématique. Il est nécessaire de s'assurer que les grandeurs mesurées ($s_i \in \{|\theta|, \varphi\}$) dépendent suffisamment du paramètre à identifier (ici la diffusivité), c'est à dire de vérifier que $\frac{\partial s_i}{\partial a}$ est maximum.

De même, les incertitudes sur les paramètres supposés connus ne doivent pas être influentes, c'est à dire $\frac{\partial s_i}{\partial p_i}$ est minimum (dans le cas d'un balayage spatial, la position étant maîtrisée, on aura ($p_i \neq x$); dans le cas d'un balayage fréquentiel, la fréquence étant maîtrisée on aura ($p_i \neq f$)). Plusieurs situations sont alors considérées :

• Balayage spatial

- Mesure du module : il est important de vérifier que $\frac{\partial |\theta|}{\partial a}$ est grand et que $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial Q}\right)$, $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial f}\right)$, $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial \rho} = \frac{\partial |\theta|}{\partial C} = \frac{\partial |\theta|}{\partial e}\right)$ sont minimum. Des comparaisons peuvent être effectuées en traçant sur la même figure $\left(p_i \frac{\partial |\theta|}{\partial p_i}\right)$ en fonction de x .

- Mesure du déphasage : $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ doit être maximum et $\frac{\partial \varphi}{\partial f}$ minimum.

• Balayage fréquentiel

- Mesure du module: $\frac{\partial |\theta|}{\partial a}$ doit être maximum et $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial Q}\right)$, $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial \rho} = \frac{\partial |\theta|}{\partial C} = \frac{\partial |\theta|}{\partial e}\right)$, $\left(\frac{\partial |\theta|}{\partial x}\right)$ minimum. Des comparaisons peuvent être effectuées en traçant sur la même figure $\left(p_i \frac{\partial |\theta|}{\partial p_i}\right)$ en fonction de f .

- Mesure du déphasage: $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ doit être maximum et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ minimum.

Les fonctions de sensibilité sont déduites des équations précédentes exprimant le module $|\theta(x, \varphi)|$ et l'argument φ : Si $x \geq 0$ et $\omega \tau \gg 1$ alors :

$|\theta(x, \varphi)| \approx \frac{Q}{2\omega \rho C e} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ et $\varphi \approx -\frac{x}{\mu} - \frac{\pi}{2}$. Ainsi, en posant $A = \frac{Q}{2\omega \rho C e}$; $B = \sqrt{\frac{\pi f}{\alpha}}$ et $E = \exp\left(-x \sqrt{\frac{\pi f}{\alpha}}\right)$, on obtient le tableau suivant :

observation	fonctions de sensibilité
module $s_i = \theta $	$a \frac{\partial \theta }{\partial a} = ABE \frac{x}{2}$
	$Q \frac{\partial \theta }{\partial Q} = AE$ et $f \frac{\partial \theta }{\partial f} = -AE \left(1 - \frac{Bx}{2}\right)$
	$\rho \frac{\partial \theta }{\partial \rho} = C \frac{\partial \theta }{\partial C} = e \frac{\partial \theta }{\partial e} = -AE$
déphasage $s_i = \varphi$	$a \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{x}{2} B$ et $f \frac{\partial \varphi}{\partial f} = -\frac{x}{2} B$

Tab. 2: fonctions de sensibilité à tracer en fonction de x

Le tracé des fonctions de sensibilité est présenté ci-dessous pour un acier standard dans le cas d'un balayage spatial (la fréquence d'excitation étant arbitrairement fixée à 0.1Hz).

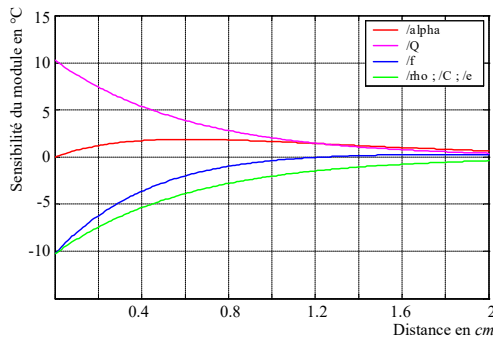


fig 9 : sensibilité du module en balayage spatial

Pour un balayage spatial, la mesure du module proche de l'origine (du masque) est très sensible aux incertitudes sur les paramètres supposés connus. A une distance éloignée du masque, la sensibilité à la diffusivité (alpha) est trop faible. Ainsi une zone intermédiaire entre 6mm et 1cm semble un bon compromis. Enfin les sensibilités à la puissance (Q) et aux paramètres thermophysiques (ρ, C, e) sont opposées. Il serait impossible dans cette configuration d'identifier ces paramètres de manière indépendante.

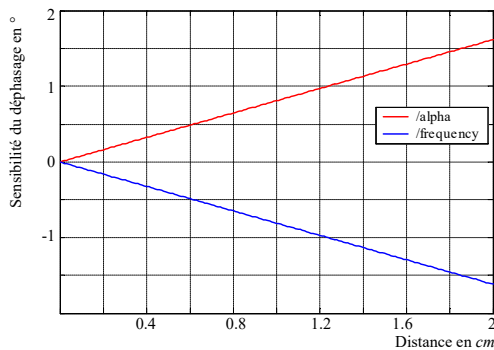


fig 10 : sensibilité du déphasage en balayage spatial

Les fonctions de sensibilité sont opposées et ne mettent pas en évidence une zone optimale. Si on maîtrise mal la fréquence d'excitation, l'identification de la diffusivité à l'aide de mesures du déphasage lors d'un balayage spatial est fortement compromise. La même étude est réalisée dans le cadre du balayage en fréquence.

observation	fonctions de sensibilité
module $s_i = \theta $	$a \frac{\partial \theta }{\partial a}$; $Q \frac{\partial \theta }{\partial Q}$ et $\rho \frac{\partial \theta }{\partial \rho} = C \frac{\partial \theta }{\partial C} = e \frac{\partial \theta }{\partial e}$ (voir tableau 2)
	$x \frac{\partial \theta }{\partial x} = -ABEx$
déphasage $s_i = \varphi$	$a \frac{\partial \varphi}{\partial a}$ (voir tableau 2)
	$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -xB$

Tableau 3: fonction de sensibilité à tracer en fonction de f

La distance au masque étant arbitrairement fixée à 1cm, le tracé des fonctions de sensibilité est réalisée.

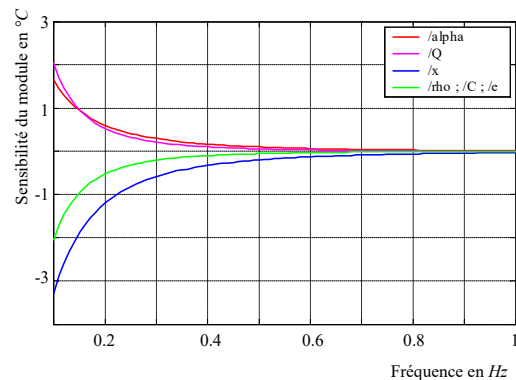


fig 11 : sensibilité du module en balayage fréquentiel

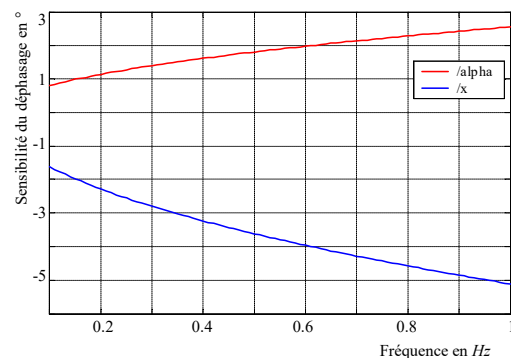


fig 12 : sensibilité du déphasage en balayage fréquentiel

La brève analyse de sensibilité précédente permet de proposer des éléments de réflexion sur ce que l'on peut attendre d'un tel banc simplifié à l'extrême en répondant, par exemple, aux questions suivantes :

- Si durant l'expérimentation, des variations non contrôlées de Q ou e peuvent apparaître, doit-on réaliser une analyse du module ou une analyse du déphasage ?
- Si on ne connaît pas précisément la position d'origine $x = 0$ doit-on réaliser un balayage spatial ou un balayage fréquentiel ?
- Si la fréquence d'excitation est bruitée, on procède à un balayage spatial et à une analyse du module ou à une analyse du déphasage ?

6 BILAN - CONCLUSION

Un dispositif expérimental simple et robuste permet d'obtenir des observations reproductibles de l'évolution de l'état d'un système soumis à une sollicitation périodique. L'analyse des informations (module et déphasage) permet de procéder à l'identification d'un paramètre clé du système étudié. Un problème inverse, adossé à une modélisation réalisée par les étudiants, est résolu. Enfin, il est montré aux étudiants l'intérêt d'une analyse de sensibilité permettant de s'assurer que les conditions nécessaires à la réussite de la procédure d'identification sont réunies.

Bibliographie

1. Serra J.J. et Besson O., *Estimation de propriétés thermiques locales, Métrologie Thermique et Techniques inverses*, Presse Universitaire de Perpignan, Vol. 2, pp. 63-81, 1999.
2. Martinet J., *La méthode des températures complexes, Eléments de thermocinétique*, Tec&Doc, Lavoisier, 1989.
3. Max J., *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, Tome 1, Masson, 1972.