

APPROCHES THERMODYNAMIQUES GLOBALE ET LOCALE APPLIQUEES A UN CYCLE REVERSIBLE TRIANGULAIRE A TRANSFORMATION « INFINITHERME »

Maxime Nagels¹, Abdelkader Anakkar², Abdelhalim Guelzim³
nagels.maxime@gmail.com

Adresses : Université de Lille ; Faculté des Sciences et Technologies, Département de physique, Bâtiment P5-
bis, 59655 Villeneuve d'Ascq

RESUME :

L'enseignement de la thermodynamique peut se faire selon deux approches. L'approche globale reposant sur une variation finie des fonctions d'état et l'approche locale utilisant l'écriture différentielle. Lors de la réforme des programmes de CPGE en 2014-2015 l'approche globale a été privilégiée en première année alors que l'approche différentielle a été repoussée en seconde année. L'objet de cet article est de montrer que l'approche globale peut amener des résultats paradoxaux à première vue. Alors que l'approche locale n'apparaît pas seulement comme un complément de l'approche globale ; mais elle est un apport essentiel à la résolution des problèmes de thermodynamique.

Nous illustrons ces aspects par l'étude d'un cycle thermodynamique particulier présentant une portion de droite de type $P = mV + b$. La transformation, associée à cette portion affine, peut être qualifiée de transformation infinitherme dans la mesure où chaque point de la portion correspond à une valeur de température différente.

Mots clés : bilan d'énergie, transfert thermique, analyse globale, analyse locale, calcul différentiel, moteur thermique, transformation adiabatique.

1. INTRODUCTION

La thermodynamique est l'un des thèmes des sciences physiques les plus ardues à apprendre et à enseigner. Le questionnement sur la thermodynamique est incessant et lorsque l'on croit maîtriser une notion, il arrive fréquemment d'être confronté à une difficulté qui n'avait pas été anticipée. Or, ce problème ne semble pas récent. Dans son Cours de Thermodynamique paru en 1913, Bouasse précise en guise d'introduction : « *Les étudiants de nos Facultés ont horreur de la Thermodynamique, ils ne disent rien n'y comprennent.* » [1].

La réforme Chatel de 2010 dans le secondaire s'est poursuivie dans les classes préparatoires aux grandes écoles aux cours des années 2014 et 2015. La thermodynamique a été fortement affectée par cette rénovation. On note ainsi la disparition du formalisme mathématique de la thermodynamique, comme on peut le lire dans Bulletin officiel spécial n° 3 du 30 mai 2013 : « *l'expression de la fonction d'état entropie sera*

systématiquement donnée [...] excluant ainsi toute thermodynamique différentielle. » [2].

L'approche de la thermodynamique peut en effet se faire sous deux aspects. L'approche globale basée sur l'utilisation des variations finies de fonctions d'état. Cette approche est notamment privilégiée dans les exercices de calorimétrie ou encore dans l'étude des machines thermiques. Néanmoins l'approche locale, par une physique mathématique et notamment par l'utilisation de l'outil différentiel, peut être fondamentale dans la résolution des problèmes de thermodynamique ; alors que la méthode globale peut présenter des limites si nous ne sommes pas suffisamment attentifs.

Nous allons illustrer ces aspects par l'étude d'un cycle thermodynamique particulier présentant une portion de droite de type $P = mV + b$ dans le diagramme de Clapeyron. Ce type de cycle est régulièrement utilisé par les enseignants notamment lorsque le cycle est refermé par une portion isochore et une isobare formant ainsi un cycle triangulaire (*Fig.1*), mais on peut aussi

¹ Lycée Roland Garros, Le Tampon, Docteur en science de l'éducation et didactique des sciences

² Maître de conférences HDR, abdelkader.anakkar@univ-lille.fr

³ Maître de conférences HDR, abdelhalim.guelzim@univ-lille.fr

envisager de refermer la portion *infinithérme* par une portion adiabatique ou encore une portion isotherme [3].

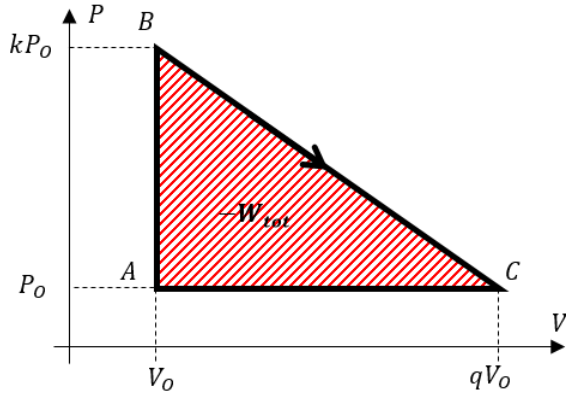


Fig. 1 : Cycle réversible triangulaire à partie infinithérme à pente négative

Notre étude porte sur le cycle triangulaire de la Figure 1, lequel est parcouru dans le sens moteur. Le choix de cet exemple est dû au fait qu'il est traité dans certains ouvrages et plus particulièrement ceux de Bernard [4, 5]. Ce choix est, entre autres, dicté par notre désaccord sur les solutions proposées lesquelles sont sujettes à de nombreux commentaires. Il apparaît alors nécessaire de réaliser une étude détaillée et rigoureuse de ce type de cycles et d'argumenter notre analyse des solutions proposées.

2. INTERET PEDAGOGIQUE DES CYCLES TRIANGULAIRES

La présence d'un tel diagramme « triangulaire » en grand nombre dans les ouvrages de thermodynamique et les documents disponibles sur internet est notamment due au fait que, sur un tel cycle, le calcul du travail se ramène à celui de l'aire (notée $-W_{tot}$) du triangle ABC (Fig. 1). Conformément aux idées développées par Gibbs [6] et Bruhat [7], ce travail est donc facilement compréhensible géométriquement et algébriquement.

Cependant, la portion affine présente sur le cycle, constitue un réel problème de thermodynamique, notamment pour le calcul du rendement. Cette difficulté est très rarement soulignée dans la littérature. Néanmoins, à notre connaissance trois ouvrages y font référence : dans l'*Esprit physique* de Bernard, paru en 1998 (tome 1) et en 2001 (tome 2) [4, 5] ainsi que dans *Exercices et problèmes de thermodynamique* de Calecki, Diu, Guthmann, Lederer et Roulet publié en 2010 [8]. Même si la question existe sur trois ouvrages supplémentaires, le calcul du rendement correspondant est malheureusement incorrect.

Malgré un nombre non négligeable d'ouvrages consacrés à la thermodynamique, nous constatons que le problème que l'on soulève dans cette étude y est quasiment absent. Ce qui nous a incités à entreprendre une étude complète de ces cycles thermodynamiques dans laquelle ont été soulignées les éventuelles sources de confusions lors du calcul du rendement [3].

3. ETUDE DU CYCLE TRIANGULAIRE MOTEUR DANS LE DIAGRAMME (P, V)

On se propose de réaliser une étude du diagramme du type de la Figure 1 dans le cas particulier où $q = 2$ et $k = 7/2$, car ce cas où $q < k$ est généralement non traité. Cette condition permet d'aboutir à l'inégalité suivante : $Q_{BC} \leq 0$. On propose un diagramme de Clapeyron de la Figure 1 où la portion affine du cycle réversible moteur passe par les points B ($V_0; kP_0$) et C (qV_0, P_0). On considère n moles de fluide initialement dans les conditions A : (V_0, P_0, T_0). En considérant le fluide comme un gaz parfait, on peut écrire la relation liant ces conditions $P_0V_0 = nRT_0$. En outre, on définit $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant. Au niveau du point B, les n moles de gaz sont dans les conditions B : ($V_0, kP_0, T_B = kT_0$). Enfin, en C les n moles de gaz vérifient C : ($qV_0, P_0, T_C = qT_0$).

3.1 Approche globale du problème

Cette approche consiste à déterminer l'énergie perdue ou gagnée par transfert thermique, Q_{BC} , à partir du premier principe appliqué au cycle :

$$\Delta U_{cycle} = W_{tot} + Q_{AB} + Q_{CA} + Q_{BC} = 0$$

On peut calculer l'énergie cédée par travail sur l'ensemble du cycle par un calcul d'aire (Fig. 1) :

$$W_{tot} = -\frac{1}{2}(k-1)(q-1)nRT_0 < 0$$

Le cycle étant moteur, il est évident d'aboutir à une énergie transférée par travail négative, c'est-à-dire cédée par le système {gaz} au milieu extérieur. Sur la portion AB, isochore, l'énergie échangée par transfert thermique avec l'extérieur se ramène à la variation d'énergie interne entre A et B :

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_0) = \frac{nRT_0}{\gamma-1}(k-1) > 0$$

Durant cette transformation, le gaz reçoit de l'énergie par transfert thermique du milieu extérieur. Sur la portion CA isobare, le transfert thermique avec l'extérieur, se ramène à la variation d'enthalpie entre C et A :

$$Q_{CA} = \Delta H_{CA} = nc_p(T_A - T_C) = \frac{n\gamma RT_0}{\gamma-1}(1-q) < 0$$

Durant cette transformation, le gaz cède de l'énergie par transfert thermique au milieu extérieur.

Il reste donc à évaluer la quantité d'énergie échangée par transfert thermique sur la portion BC et surtout déterminer son signe dans l'objectif de calculer le rendement du cycle moteur défini comme suit :

« Le rendement d'un cycle moteur est le rapport du travail transféré à l'extérieur par la somme de tous les

transferts thermiques reçus effectivement par le système. ».

Par les calculs précédents et avec le fait que $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$, on aboutit à :

$$Q_{BC} = \frac{nRT_0}{2(\gamma - 1)} ((\gamma - 1)(qk - 1) + (\gamma + 1)(q - k))$$

Il apparaît donc que le signe de Q_{BC} n'est pas immédiat et dépend des valeurs de k et de q . Dans notre cas, avec $q = 2, k = 7/2$ et $\gamma = 5/3$, nous trouvons $Q_{BC} = 0$

Ainsi, l'expression du rendement moteur vaut :

$$\eta = -\frac{W}{Q_{AB}} = \frac{1}{2}(q - 1)(\gamma - 1)$$

Avec les valeurs choisies, on trouve $\eta = 1/3$. Ce rendement est inférieur à celui de Carnot fonctionnant entre les températures minimale ($T_{\min} = T_0$) et maximale ($T_{\max} = k T_0$). Autrement dit :

$$\eta \leq 1 - \frac{1}{k} < 1$$

En étant plus attentif à ce résultat, on remarque une chose à la fois inattendue et choquante : si k devient très grand alors : $\eta \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \rightarrow 1$.

L'égalité large pose donc problème. En effet, pour le cas de k très grand, le cycle correspondrait à un moteur perpétuel de seconde espèce, c'est-à-dire « un dispositif qui transformerait périodiquement en travail la totalité de la chaleur d'un corps quelconque sans compensation. » [9]. « Sans compensation veut dire qu'une telle transformation n'est possible que si elle est liée à une modification qui a lieu en même temps dans le milieu extérieur » [10]. Ce qui est impossible conformément à l'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique.

Il y a donc clairement un problème dans le calcul du rendement. En effet, même si, sur la portion BC, $Q_{BC} = 0$, elle peut être formée d'une somme d'énergies élémentaires positives ou négatives échangées par transfert thermique. Ainsi, lors du calcul du rendement, ce n'est pas Q_{BC} qui doit intervenir mais uniquement la partie de l'énergie exclusivement positive de cette portion BC. C'est pourquoi des précisions supplémentaires à la définition du rendement donnée ci-dessus sont nécessaires. Il est donc important d'attirer l'attention des étudiants sur les précautions à prendre pour le calcul du rendement en prenant garde, d'une part, à avoir une définition aussi complète que possible et, d'autre part, à veiller à la bonne compréhension de cette définition : « Le rendement d'un cycle moteur est le rapport du travail transféré à l'extérieur par la somme de tous les transferts thermiques élémentaires positifs reçus effectivement par le système à un moment quelconque du cycle. »

Ainsi, il doit exister une autre condition sur k et/ou sur q empêchant de faire tendre le rendement vers l'unité ; c'est ce que nous proposons de trouver en réalisant une analyse très détaillée à travers une nouvelle approche [3].

3.2 Approche locale du problème

Les résultats précédemment établis ne permettent pas un calcul du rendement correct. Il est donc essentiel de s'intéresser au signe de δQ sur la portion BC. Pour une analyse rigoureuse, il faut d'abord s'intéresser à l'étude de l'évolution des paramètres d'état du gaz. La pression est une fonction affine du volume. On relie alors les coordonnées des points B et C à la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite $P = mV + b$:

$$m = -\frac{k - 1 P_0}{q - 1 V_0} < 0 \quad \text{et} \quad b = \frac{qk - 1}{q - 1} P_0$$

La température, pour cette portion BC, est donnée par l'expression de la relation des gaz parfaits :

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{mV^2 + bV}{nR}$$

Cette fonction présente un maximum pour un volume $V_m = -\frac{b}{2m} = \frac{1}{2} \frac{qk - 1}{k - 1} V_0$. On peut donc tracer l'allure de $T(V)$ (Fig. 2). Cette température maximum T_m s'exprime en fonction des paramètres k et q :

$$T_m = -\frac{b^2}{4nRm} = \frac{1}{4nR} \frac{(qk - 1)^2}{(k - 1)(q - 1)} P_0 V_0$$

$$T_m = \frac{T_0}{4} \frac{(qk - 1)^2}{(k - 1)(q - 1)}$$

Les applications numériques donnent :

$$V_m = \frac{6}{5} V_0 \quad \text{et} \quad T_m = \frac{18}{5} T_0$$

On remarque aussi, par symétrie de la fonction que la température vaut de nouveau zéro⁴ pour une valeur de volume de

$$2V_m = \frac{12}{5} V_0$$

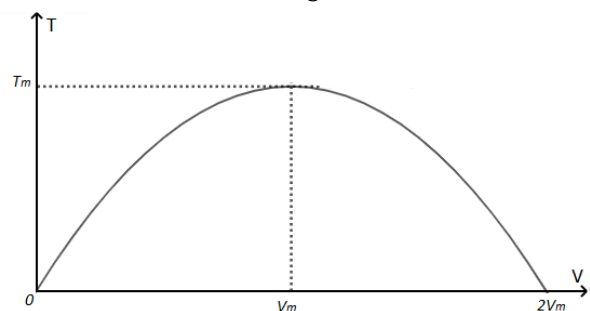


Fig. 2 : Evolution de la température avec le volume du système

⁴ Valeur non atteignable, mais qui est ici une limite de notre étude.

Dans le cas où les volumes V_A et V_C sont de part et d'autre de V_m (Fig. 2) i.e.

$$V_A = V_O < V_m = \frac{6}{5} V_O < V_C = 2V_O$$

L'allure de la température en fonction du volume est représentée par la Figure 3 correspondant à la partie de la courbe tracée par une ligne épaisse en rouge.

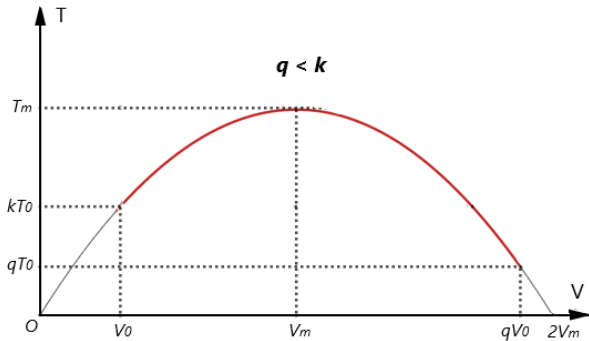


Fig.3 : Variation de la température, présentée par un trait épais en rouge, en fonction du volume du système dans le cas

$$\text{où } V_A = V_O < V_m = \frac{6}{5} V_O < V_C = qV_O = 2V_O.$$

Compte tenu du fait que la température passe par un maximum, il va falloir réaliser sur la portion BC, l'étude de l'évolution du signe de l'énergie échangée par transfert thermique au cours de cette transformation. Soit une évolution élémentaire de n moles de gaz sur la portion BC du cycle triangulaire. L'application du premier principe donne :

$$dU = \frac{nR}{(\gamma - 1)} dT = \delta Q + \delta W = \delta Q - PdV$$

$$\text{Soit : } \delta Q = \frac{nR}{(\gamma - 1)} dT + P dV$$

$$= \frac{nR}{(\gamma - 1)} dT + (mV + b) dV$$

La différentielle de l'équation d'état des gaz parfaits permet alors d'écrire : $\delta Q = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} mV + \frac{\gamma}{\gamma-1} b \right) dV$. Or, sur BC la variation $dV > 0$, le signe de δQ est donc identique à celui de la fonction :

$$f_Q(V) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} mV + \frac{\gamma}{\gamma - 1} b$$

$$\text{avec : } m = -\frac{5P_0}{2V_0} \quad \text{et} \quad b = 6P_0.$$

Nous étudierons donc le signe de la fonction :

$$g_Q(V) = \frac{f_Q(V)}{P_0} = -10 \frac{V}{V_0} + 15$$

Cette fonction est positive sur l'intervalle $[0, V_N]$ tel que V_N soit défini par : $g_Q(V) = 0$ i.e.

$$V_N = \frac{3}{2} V_0$$

On remarque clairement que : $V_m < V_N < 2V_m$ et on accède au tracé de la fonction $f_Q(V)$ (Fig. 4). Ainsi, le changement de signe de la quantité δQ n'a pas lieu au

même volume que le maximum de température. Autrement dit, le système peut continuer à recevoir de l'énergie par transfert thermique de la part du milieu extérieur alors que sa température diminue (sur l'intervalle $[V_m, V_N]$). Cette approche est donc particulièrement intéressante puisqu'elle permet de distinguer clairement la notion de température et de transfert thermique.

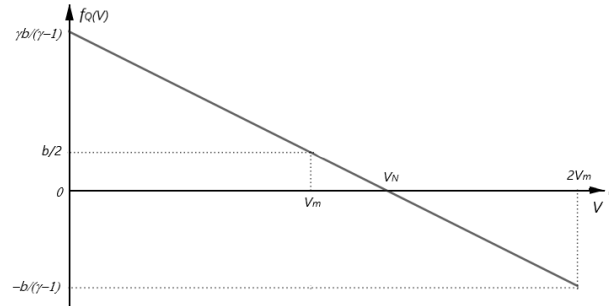


Fig. 4 : Evolution de la fonction $f_Q(V)$ représentative de la quantité d'énergie élémentaire échangée par transfert thermique sur la portion BC

3.3 Calcul du rendement

Le calcul du rendement est désormais conditionné à la recherche de la partie de la transformation BC possédant les quantités $\delta Q > 0$.

Dans notre cas $V_0 < V_N < 2V_0$, le signe de δQ est positif sur l'intervalle $[V_0, V_N]$. La quantité Q_{BC} étant nulle durant la transformation BC, le système cède autant d'énergie par transfert thermique, qu'il en reçoit. Il est important de noter que pour une transformation finie, un transfert thermique nul ne signifie pas que la transformation est adiabatique. En effet, pour avoir une transformation adiabatique il faut que $\delta Q = 0$ sur chaque portion infinitésimale de la portion BC.

Le volume $V_N = \frac{3V_0}{2}$, désignant le volume du point N, correspond à la pression

$$P_N = mV_N + b = \frac{9}{4} P_0$$

et à une température (Fig.5) :

$$T_N = \frac{P_N V_N}{nR} = \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} T_m = \frac{15}{16} T_m < T_m$$

Ainsi $T_N = 0,9375 T_m$, c'est-à-dire que la température pour laquelle δQ change de signe est très proche de la température maximale ! Néanmoins, cette température T_N est obtenue pour un volume $V_N > V_m$ ($V_m = \frac{6V_0}{5}$) ce qui signifie que le système est bien passé par un état de température maximale T_m avant de voir sa température diminuer.

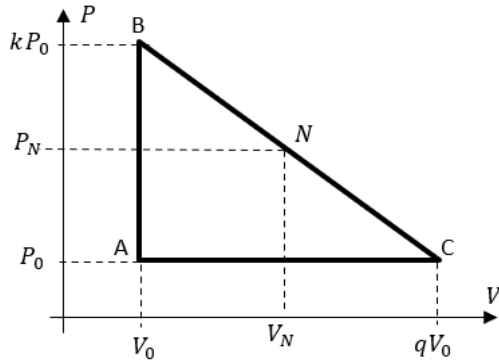


Fig. 5 : Cycle triangulaire faisant apparaître le changement de signe sur la portion infinitherme : $\delta Q > 0$ entre B et N et $\delta Q < 0$ entre N et C

Il est donc nécessaire de calculer la quantité d'énergie effectivement reçue par transfert thermique par le système. On a donc :

$$Q_{BN} = \int_B^N \delta Q = \int_{V_0}^{V_N} f_Q(V) dV = P_0 \int_{V_0}^{V_N} \left(-10 \frac{V}{V_0} + 15 \right) dV = \frac{5}{4} P_0 V_0$$

Ainsi avec

$$Q_{AB} = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} (k - 1) = \frac{15 P_0 V_0}{4}$$

et

$$W_{tot} = -\frac{1}{2} (k - 1) (q - 1) n R T_0 = -\frac{5 P_0 V_0}{4}$$

le calcul du rendement moteur vaut alors désormais :

$$\eta = -\frac{W}{Q_{AB} + Q_{BN}} = 25\%$$

La valeur du rendement calculée par la méthode globale, $\eta = \frac{1}{3}$, est supérieure à $\eta = \frac{1}{4}$ obtenue par la méthode locale à cause d'une sous-évaluation de l'énergie effectivement reçue par transfert thermique. Insistons sur le fait que certaines corrections, qu'on trouve sur internet et c'est également le cas de quelques livres, ne prennent malheureusement pas en compte cette partie d'énergie qui, en fin de compte, est tout simplement omise.

De manière générale, on aboutirait à une relation donnant le rendement moteur en fonction des deux paramètres q et k correspondant aux états d'équilibre initial et final sur la transformation BC [3] :

$$\eta = \frac{(\gamma^2 - 1)}{\frac{2(\gamma + 1)}{(q - 1)} + \left(\frac{\gamma k}{(k - 1)} - \frac{1}{(q - 1)} \right)^2}$$

On peut calculer la limite du rendement obtenu pour des valeurs infinies de q et de k : $\eta \rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma^2} < 1$. Cette valeur de rendement limite inférieure à 1, permet de respecter le deuxième principe de la thermodynamique limitant la conversion d'énergie par transfert thermique en travail.

4. CONCLUSION

La présentation des diagrammes (P, V) possédant une transformation « infinitherme » pour déterminer simplement l'expression du travail des forces pressantes par le calcul de l'aire d'un triangle, peut soulever de nombreuses difficultés liées au calcul du rendement du cycle moteur. En effet, si le problème est traité avec légèreté, il y a un risque d'engendrer un amalgame entre les concepts de transfert thermique et de température.

De plus l'approche globale du calcul du rendement engendre des résultats erronés que l'étudiant pourrait mal interpréter. Aussi seule l'approche locale basée sur le calcul différentiel permet d'aboutir aux résultats escomptés.

En outre, même si on assiste à une utilisation de plus en plus fréquente des données thermodynamiques sous forme de fichiers informatisés ; ces données sont couramment traduites sous forme de diagrammes qui permettent une visualisation commode des évolutions du système, d'une part, et de l'analyse des cycles thermodynamiques, d'autre part. Donc, la représentation graphique en thermodynamique, adoptée dans notre étude, reste encore une alternative intéressante pour le chercheur et pour l'ingénieur.

Voilà pourquoi nous devons continuer à créer des outils pédagogiques et des stratégies d'enseignement qui peuvent aider les élèves à améliorer leur compréhension des concepts. En outre, introduire d'abord les machines thermiques rapidement dans les enseignements de thermodynamique permettrait *a priori* de mettre en avant l'intérêt des diagrammes thermodynamiques. Mais, là encore, il est nécessaire d'être prudent lors de l'utilisation de ces diagrammes et ne pas céder aux raccourcis.

Bibliographie :

- [1] H. Bouasse. *Cours Thermodynamique 1^{ère} partie Principes Généraux. Gaz et Vapeurs*. Paris : Delagrave 2^{ème} édition, Volume I, 1913.
- [2] BO Bulletin Officiel -spécial n° 3- 30 mai 2013.
- [3] M. Nagels. *Évolutions de quelques concepts de thermodynamique classique dans l'enseignement secondaire et supérieur en France au cours du 20^{ème} siècle*. Université de Lille. [Mémoire de thèse] 2017.
- [4] D. Bernard. *L'esprit physique*, Paris : Ellipses, Vol. Tome I, 1998.
- [5] D. Bernard. *L'esprit physique*, Paris : Ellipses, Vol. Tome II, 2001.
- [6] J. W. Gibbs. *Diagrammes et surfaces thermodynamiques*. Traduit de l'anglais par M. G. Roy : Scientia, 1903.
- [7] G. Bruhat. *Cours de Thermodynamique*, Paris : Masson, 1^{ère} édition, 1926.
- [8] D. Calecki, B. Diu, G. Guthmann, D. Lederer & B. Roulet. *Exercices et problèmes de thermodynamique* Hermann Editeurs, 2010.

[9] I. Bazarov, *Thermodynamique*, Editions MIR
Moscou, 1989.

[10] A. Kastler & G. Bruhat ; *Thermodynamique*, 5^{ème}
édition, Masson et Cie Editeurs 1962.